جمهورية العراق

وزارة التربية

المديرية العامة للمناهج



للصف الرابع العلمي

تأليف

الدكتور / طارق شعبان رجب الحديثي

يوسف شريف المعمار

محمد عبد الغفور الجواهري

الطبعة الثانية عشر

١٤٤٠ هـ / ٢٠١٩ م

الاشراف العلمي على الطبع

حسين صادق العلاق

الاشراف الفني على الطبع

احمد حافظ كطيش

الموقع والصفحة الرسمية للمديرية العامة للمناهج

www.manahj.edu.iq
manahjb@yahoo.com
Info@manahj.edu.iq





مقدمة:

يُعدّ هذا الكتاب الحلقة الأولى في سلسلة كتب الرياضيات الجديدة لطلبة الدراسة الإعدادية للفرع العلمي بوصفه بداية الدراسة الأكثر تخصصاً في هذا المجال وقد اشتمل على سبعة فصول وهي:

الفصـــــل الاول : يتضمن المنطق الرياضي.

الفصـــل الثاني : المعادلات والمتباينات.

الفصــل الثالث : تضمن المبادئ الأساسية في الاسس والجذور.

الفصـــل الرابع : تضمن معلومات أساسية في حساب المثلثات.

الفصل الخامس : تضمن هذا الفصل المفاهيم الأساسية في مجال هندسة المتجهات.

الفصل السادس : تضمن المعلومات والمفاهيم الأساسية في مجال الهندسة الاحداثية.

الفصــل السابع : جاء هذا الفصل مكملاً لما درسه الطالب في المرحلة المتوسطة في مادة الاحصاء.

في الختام نرجو من الله العلي القدير ان يوفقنا الى ما فيه الخير لبلدنا العزيز ونأمل من زملائنا المدرسين موافاتنا بملاحظاتهم بهدف التطوير والله الموفق.

المؤلفون

الفصل الأول : المنطق الرياضي

1

[1-1] العبارة المنطقية

[1-2] اداة الربط اذا كان ....فان

[1-3] اداة الربط اذا و فقط اذا

[1-4] الاقتضاء

[1-5] الجمل المفتوحة

[1-6] تكافؤ الجمل المفتوحة

[1-7] العبارات المسورة

الاهداف السلوكية

ينبغي ان يصبح الطالب في نهاية دراسته لهذا الموضوع قادراً على ان:

- يتعرف على قيم الصواب للعبارات ونفيها والعبارات المركبة
- يتعرف على الجمل المفتوحة والجمل المركبة من خلال التعرف على ادوات الربط
- يتعرف على تكافؤ الجمل المفتوحة
- يتعرف على العبارات المسورة ونفيها

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
العبارة المنطقية	
اداة الربط و	$\wedge$
اداة الربط او	$\vee$
اداة الربط اذا كان ... فأن	$\rightarrow$
اداة الربط اذا وفقط اذا	$\leftrightarrow$
الاقتضاء	$\Leftarrow$ ، $\Leftrightarrow$
التسوير : الكلي والجزئي	$\forall$ ، $\exists$

تمهيد : تحتاج الرياضيات الى سلسلة من الخطوات المرتبة بعضها على بعضها الآخر لكي نصل الى نتائج صحيحة . ومن هذه الزاوية يمكن النظر إلى الرياضيات على أنها نظام منطقي . وكتابة العبارات الرياضية في صور رمزية مع وضع قواعد ثابتة سهلة الاستخدام يكوّن ما يسمى (المنطق الرياضي) وعليه فان المنطق الرياضي ليس نظرية لكنه لغة علمية متفق عليها بين علماء الرياضيات فاللغة الاعتيادية (الدارجة) من الجائز أن يختلف القراء في فهمها كل حسب قدرته، أما في الرياضيات فلا نستطيع أن نترك مفهوم الجُمل (العبارات) الرياضية لهذا الخلاف ، ولذا وضع العلماء إتفاقات لتفسير المقصود من الجُمل الرياضية التي نستعملها.

[1-1] العبارة المنطقية : *Logical statement*

تواصل الدرس لقد درسنا في الصف الثالث المتوسط في موضوع المنطق الرياضي نقسم الجُمل الى نوعين :

أ) جملة لا تحمل إلينا خبراً معيناً .

ب) جملة تحمل إلينا خبراً معيناً (جملة خبرية) .

وان من مهام المنطق الرياضي هو معرفة ما اذا كانت الجملة الخبرية صائبة أو خاطئة . ولقد عرفت أن الجملة الخبرية تسمى عبارة منطقية وهي إما صائبة أو خاطئة ولا يمكن أن تكون صائبة وخاطئة في وقت واحد .

ولقد علمت انه إذا رمزنا لعبارة منطقية بالرمز P فان نفي P تكون صائبة (True) (T) اذا كانت P خاطئة (False) (F) ويكون نفي P خاطئة اذا كانت P صائبة وعبرنا عن ذلك كما في الجدول (1 - 1) .

P	∼P
T	F
F	T

الجدول (1 - 1)

ومن المفيد ان نذكر جدولي الصواب لأداتي الربط و ($\wedge$) ، او ($\vee$):

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

الجدول (1-2)

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

الجدول (1-3)

[1-2] أداة الربط : (إذا كان ... فأن) *If ... then*

سنتعرف الان على اداة الربط (إذا كان ... فان) فهي احدى الروابط التي تستخدم لتكوين العبارة المركبة (Compound Statement).

فالعبارة المركبة:

اذا كان المثلث ﻫ ب جـ متساوي الساقين فأن قياسي زاويتي قاعدته متساويان تكونت من ربط العبارة:

((المثلث ﻫ ب جـ متساوي الساقين)) بالعبارة ((قياسا زاويتي قاعدة المثلث ﻫ ب جـ متساويان)) بأداة الربط . ((اذا كان .... فان)) .

وقد اصطلح على تسمية العبارة التي تلي (اذا كان) بالمقدمة والعبارة التي تأتي بعد (فإن) بالتالية . كما تسمى الاداة :

(إذا كان .... فان) أداة الشرط.

فالعبارة (المثلث ﻫ ب جـ متساوي الساقين) تكون مقدمة العبارة المركبة المذكورة سابقاً ، كما أن العبارة (قياسا زاويتي قاعدة المثلث ﻫ ب جـ متساويان) هي تاليها .

والان لنأخذ المثال الآتي :

قالت الأم لولدها : (اذا نجحت في الامتحان فسأعطيك هدية)

لندرس الحالات الآتية:

1) نجح الولد في الامتحان وقدمت له أمه هدية

2) نجح الولد في الامتحان ولم تقدم له أمه هدية

3) لم ينجح الولد في الامتحان وقدمت له أمه هدية

4) لم ينجح الولد في الامتحان ولم تقدم له أمه هدية

سوف نقبل صواب العبارة التي ذكرتها الأم في الحالات الأولى والثالثة والرابعة أما إذا حصلت الحالة الثانية فإن العبارة التي ذكرتها تكون خاطئة .

وسنتفق على استعمال محدد لأداة الربط (إذا كان ....فإن)

فإذا كانت P ، Q عبارتين فإنه يرمز للعبارة المركبة: بالرمز $P \longrightarrow Q$.

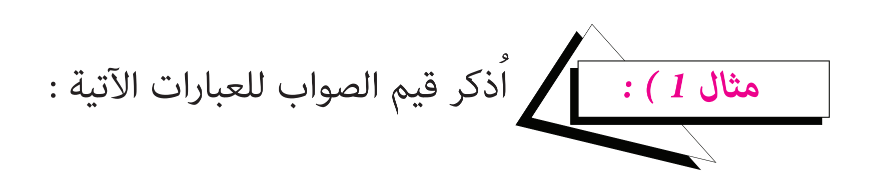
وتقرأ ((اذا كان P فان Q))

وقد اتفق على أن يكون جدول الصواب للعبارة $P \longrightarrow Q$ كالآتي :

P	Q	$P \longrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

الجدول (1-4)

أي أن $P \longrightarrow Q$ تكون خاطئة إذا كانت المقدمة «صائبة » والتالية « خاطئة » فقط .


مثال (1) :

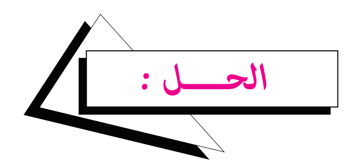
اُذكر قيم الصواب للعبارات الآتية :

1) اذا كان $\sqrt{3} < \sqrt{2}$ فان $\sqrt{-2} \notin R$

2) إذا كان 5+7 = 12 فإن 2+6= 7

3) إذا كان 5+7 =11 فإن 2+6=8

4) إذا كان صفر =1 فإن $\sqrt{3}$ عدد نسبي


الحـــل :

1) صائبة لأن المقدمة صائبة والتالية صائبة.

2) خاطئة لأن المقدمة صائبة والتالية خاطئة.

3) صائبة لأن المقدمة خاطئة والتالية صائبة.

4) صائبة لأن المقدمة خاطئة والتالية خاطئة.

[1-3] أداة الربط : (إذا وفقط إذا) *If and only if*

كثيراً ما نستعمل العبارة المركبة:

$(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$

فمثلاً : إذا كان المثلث متساوي الاضلاع فإن قياسات زواياه متساوية كذلك إذا كانت قياسات زوايا مثلث متساوية فانه يكون متساوي الاضلاع . تسمى أمثال هذه العبارة المركبة (عبارة شرطية ثنائية) فإذا فرضنا P،Q عبارتين فإن العبارة الشرطية الثنائية

$(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$ يرمز لها بالرمز $P \longleftrightarrow Q$

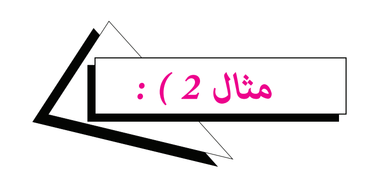
وتقرأ : (P إذا وفقط إذا Q)

والجدول (5 - 1) هو جدول صواب العبارة : $P \longleftrightarrow Q$

				$P \leftrightarrow Q$
P	Q	$P \longrightarrow Q$	$Q \longrightarrow P$	$(p \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

جدول (5-1)

أي أن $Q \leftrightarrow P$ تكون صائبة في حالتين هما : إذا كانت كل من العبارتين المركبتين لها صائبتين معاً أو خاطئتين معاً.



أ) $X^2-3X-4=0 \leftrightarrow X=-1,X=4$

ب) $X=-2 \leftrightarrow X^5=-32$

[4-1] الاقتضاء *Implication*

سنوضح معنى الاقتضاء من خلال الحالتين الآتيتين :

الحالة الأولى : الاقتضاء في اتجاه واحد والذي يُرمز له $\Rightarrow$

لنرمز : «$X=3$» بالرمز P

ولنرمز : «$X^2= 9$» بالرمز Q

فإذا كانت $X = 3$ صائبة فإن هذا يقتضي أن تكون $X^2=9$

اي : $P \Rightarrow Q$

أما إذا كانت $X^2=9$ فان $X = \pm 3$

اي : $P \not\Rightarrow Q$

الحالة الثانية : الاقتضاء في اتجاهين متعاكسين والذي يُرمز له $\Leftrightarrow$

لنرمز «$X=3$» بالرمز P

ولنرمز «$X^3=27$» بالرمز Q

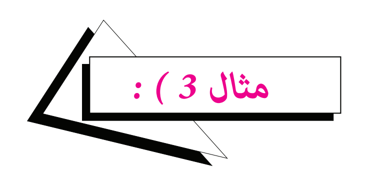
فإذا كانت $X = 3$ صائبة فإن هذا يقتضي أن تكون $X^3=27$

أي $P \Rightarrow Q$

وإذا كانت $X^3 = 27$ صائبة فإن هذا يقتضي أن تكون $X = 3$

أي $Q \Rightarrow P$

أن $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ يعني ان $P \Leftrightarrow Q$



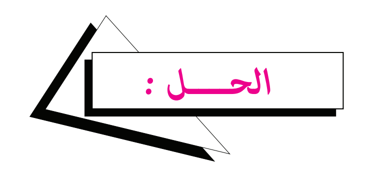
إختر أحد الرمزين $\Leftarrow$ ، $\Leftrightarrow$ لوضعه بين التعبيرين في الحالات الآتية لتصبح العبارة صحيحة .

أ) $X = 2 , X^3 = 8$

ب) $X>2 , X>5$

جـ) $X^2 \geq 0 , X \leq 0$

د) P : ﺃ ب جـ د شكل رباعي قطراه متناصفان ، Q : ﺃ ب جـ د متوازي اضلاع



أ) $X=2 \Leftrightarrow X^3=8$

ب) $X>2 \Rightarrow X>5$

جـ) $0 \leq X^2 \Rightarrow 0 \geq X$

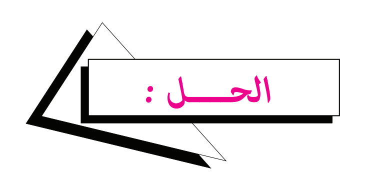
د) $P \Leftrightarrow Q$

تعريف (1-1)

يقال أن العبارة P مكافئة للعبارة Q اذا كان لها نفس جدول الصواب للعبارة ويرمز لها بالرمز $Q \equiv P$



أثبت أن $P \longrightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$



نعمل الجدول الآتي :

P	Q	$\sim P$	$P \longrightarrow Q$	$\sim P \vee Q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

$\equiv$

تمرينات (1 - 1)

س1 /

بين أياً من العبارات التالية صائبة وأياً منها خاطئة مع السبب :

أ) العدد 5 يُقسم العدد 25 والعدد 7 يُقسم 25 .

ب) العدد 5 يُقسم العدد 25 أو العدد 7 يُقسم 25 .

جـ) العدد 7 ليس أولياً أو العدد 4 أولياً .

د) قطرا المربع متعامدان و قطرا متوازي الاضلاع متناصفان .

هـ) قطرا المربع متعامدان أو قطرا المستطيل متعامدان .

س2 /

استخدم ⇔ أو ⇐ للربط بين العبارتين في الجدول الآتي لكي تصبح العبارة المركبة الناتجة صائبة :

العبارة P	الرمز	العبارة Q
الشكل الرباعي مستطيل		قطرا الشكل الرباعي يتناصفان
الشكل الرباعي معين		أضلاع الشكل الرباعي متطابقة
الشكل الرباعي مستطيل		الشكل الرباعي قياس زواياه قوائم
$a.b=0 ,\ a,b \in R$		$a=0 \vee b=0$
$X = -3$		$X^2 = 9$
الشكل الرباعي مربع		الشكل الرباعي قياس زواياه قوائم
$X^2 = 25$		$X = 5$
$X^3 = -125$		$X = -5$
أ ب جـ مثلث متساوي الاضلاع		أ ب جـ مثلث متساوي الساقين
$X=1 \vee X=2$		$(X-1)(X-2)=0$

س3 /

برهن ان :

1) $\sim P \longrightarrow \sim Q \equiv Q \longrightarrow P$

2) $P \wedge \sim Q \equiv \sim(P \longrightarrow Q)$

س4 /

اذا كانت P صائبة ، Q صائبة ، S خاطئة فأي العبارات الآتية خاطئة وأيها صائبة ؟

1) $(P \longrightarrow Q) \vee S$

2) $(P \longleftrightarrow S) \wedge P$

3) $(S \longrightarrow Q) \wedge P$

4) $(S \longleftrightarrow S) \vee S$

س 5 /

ضع دائرة حول رمز الاجابة الصحيحة فيما يلي : -

P ، S عبارتين اعتمدت في الاسئلة الاتية :

1) $\sim P \longrightarrow P$ تكافيء

أ) $P \longrightarrow P$ ب) $\sim P \longrightarrow P$ جـ) $\sim P$ د) $P \wedge \sim P$

2) $S \longleftrightarrow S$ عبارة

أ) صائبة دائماً ب) صائبة مرة واحدة جـ) خاطئة دائماً د) خاطئة مرة واحدة

3) نفي العبارة « $3 + 5 > 9$ » $\vee \sim S$ هو : -

أ) « $3 + 5 \geq 9$ » $\vee \sim S$ ب) « $3 + 5 < 9$ » $\vee \sim S$

جـ) « $3 + 5 \leq 9$ » $\wedge \sim S$ د) « $3 + 5 \leq 9$ » $\wedge S$

[1-5] الجمل المفتوحة Open Sentences

عرفنا العبارة المنطقية بأنها جملة خبرية إما صائبة أو خاطئة (وليس الاثنان معاً) .
ولكن اذا لاحظنا الجمل الآتية :

أ) X عدد صحيح أكبر من الصفر والتي نرمز لها بالرمز P(X)

ب)Y+1=3 والتي نرمز لها بالرمز(Q(Y

جـ) a+b=6 حيث b ، a أعداد صحيحة والتي نرمز لها بالرمز G(a,b)

د) . . . . أحدى مدن العراق.

وجدنا ليس بالامكان القول أن كلاً من هذه الجمل تمثل عبارة منطقية . ولكن إذا عوضنا في الجملة (أ) بالعدد 9 بدل الحرف X تصبح (9عدد صحيح أكبر من الصفر) وهذه عبارة صائبة اعط قيمة لـ (Y) في الجملة (ب) لتجعلها عبارة خاطئة . ولو أعطيت كلاً من b ، a قيمة تساوي 3 نحصل على العبارة (3+3=6) وهي عبارة صائبة . ضع الاسم في الفراغ المناسب في الجملة (د) لتجعلها عبارة صائبة .

تعريف (2-1)

1) المتغير هو رمز يأخذ قيماً لمجموعة من الاشياء المفروضة من مجموعة التعويض لذلك المتغير .

2) الجملة المفتوحة هي جملة تحتوي على متغير أو أكثر وتتحول إلى عبارة عند إعطاء كل متغير قيمة معينة من مجموعة التعويض .

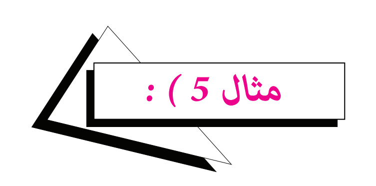
[1-6] تكافؤ الجمل المفتوحة :

لتكن: P(X): 2X=4

Q(x): X-1=1

ولتكن مجموعة التعويض لكل منها هي مجموعة الأعداد الصحيحة (Z)نلاحظ أن مجموعة الحل للجملة المفتوحة P(X) هي {2} وإن مجموعة الحل للجملة المفتوحة Q(X) هي {2}.

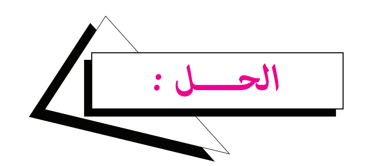
تسمى الجملتان المفتوحتان Q(X),P(X) متكافئتين وذلك لتساوي مجموعتي الحل لكل منهما .



إذا كانت $P(X):X=2$

$Q(X):X^2=4$ ومجموعةالتعويض لكل منها هي مجموعة الأعداد الصحيحة Z .

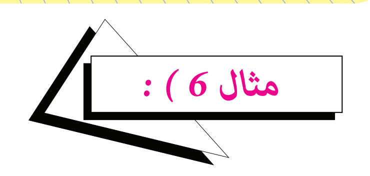
هل $P(X),Q(X)$ متكافئتان ؟



نلاحظ أن مجموعة الحل للجملة المفتوحة $P(X)$ هي $\{2\}$ وأن مجموعة الحل للجملة المفتوحة $Q(X)$ هي $\{2,-2\}$ وبما أن $\{2\} \neq \{2,-2\}$ لذا نقول أن الجملتين المفتوحتين $P(X)$ ، $Q(X)$ جملتان غير متكافئتين .

تعريف (3-1)

إن نفي الجملة المفتوحة $P(X)$ هي الجملة المفتوحة «ليس صحيحاً $P(X)$ » أو أي جملة مفتوحة تكافيء ذلك وسوف نستعمل الرمز $\sim P(X)$ للتعبير عن نفي الجملة المفتوحة $P(X)$.



لنفرض أن مجموعة التعويض لكل جملة مفتوحة فيما يلي هي مجموعة الأعداد الصحيحة Z .

نفيها $\sim P(X)$	الجملة المفتوحة $P(X)$
$X^2-4\neq0$	$X^2-4=0$
X ليس عدداً صحيحاً زوجياً	X عدد صحيح زوجي
$X\neq4$ او $X+1=6$	$X=4$ و $X+1\neq6$



تمرينات (2 - 1)

س1 /

اكتب مجموعة الحل لكل جملة مفتوحة من الجمل الآتية:

	الجملة المفتوحة	مجموعة التعويض
أ)	$X<3$	N
ب)	$X^2-11X+30=0$	$\{10, 6 , 5 , 3\}$
جـ)	$(X-1)(X-\frac{3}{5})(X-30)=0$	Z
د)	$X>4$ و $(X-1)(X-5)=0$	N
هـ)	X لا تقبل القسمة على 4	$\{10 , 8 , 6 , 4 , 2\}$
و)	$X+5\geq 0$	Z

س2 / يوجد في كل مما يأتي زوج من الجُمل المفتوحة ، أي من هذه الأزواج يمثل جملتين مفتوحتين متكافئتين مع العلم أن مجموعة التعويض هي Z .

أ) $X-3=3 , 3X-5=X+7$ ب) $X=2 , X^2=4$ جـ) $X^2=9$ ، $X=3$ او $X=-3$

د) $(X+1)(2X+1)=0$ ، $X+1=0$ هـ) $X^2-6X+5=0 , (X-1)(X-5)=0$

و) $X = 0$ ، X أكبر من -1 و أصغر من 1 ز) $(X-1)(X-2)=0 , 3 >X\geq 0$

س3 / اِنفِ كلَّ جملة مفتوحة من الجُمل الآتية ثم جد مجموعة الحل للجملة المنفية مع العلم أن مجموعة التعويض هي $\{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$

أ) $2X=4$ ب) $X+4=7$ جـ) $(X-3)(X-4)=0$ د) $X^2\neq 9$ و $X+2=4$ هـ) $X^2=16$ او $X-1=4$

س4 / إذا علمت أن X ، Y عناصر في المجموعة $\{ 0 , 1 , 2 , ... , 9 \}$

فاكتب مجموعة الحل لكل من الجمل المفتوحة الآتية على شكل أزواج مرتبة

أ) $X-Y=3$

ب) $X+Y=15$

[1-7-1] العبارات المسورة كلياً والعبارات المسورة جزئياً :

يحاول المنطق الرياضي عندما يكون ذلك ممكناً الاستعاضة عن الكلمات برموز متفق عليها وسنقدم هنا رمزين منطقيين هامين :

اولاً : إذا أردنا أن نذكر أن كل عنصر من مجموعة A يجعل F(X) عبارة صائبة فإننا نقول : «مهما كان a من A فإن F(a) عبارة صائبة»

أو «لكل $A \ni a$ يكون F(a) عبارة صائبة»

ويكتب هذا القول بشكل رمزي مختزل على النحو الآتي:

$\forall\ a \in A$ فان F(a) عبارة صائبة .

يسمى الرمز $\forall$ سوراً كلياً (دلالة الشمول) أو المسور الكلي وتسمى العبارة

$\forall\ a \in A$ فإن F(a) عبارة مسورة كلياً .

مثلاً :

$(X+1)^2=X^2+2X+1$ صائبة لكل عدد طبيعي يوضع مكان X ويمكن كتابتها كما يأتي :

$\forall\ X \in N$ فأن $(X+1)^2=X^2+2X+1$

ثانياً : إذا أردنا أن نذكر أن بعض عناصر مجموعة A تجعل G(x) عبارة صائبة فإننا نقول :

«يوجد في الاقل عنصر من A يجعل G(x) عبارة صائبة»

ونكتب هذا الكلام بشكل رمزي كالآتي :

$\exists\ b \in A$ بحيث G(b) عبارة صائبة (دلالة الوجود)

يسمى الرمز $\exists$ سوراً جزئياً وتسمى العبارة $\exists\ b \in A$ ، G(b) عبارة مسورة جزئياً فإذا أردنا مثلاً أن نقول أن للمعادلة X+1=2 حلّاً في مجموعة الأعداد الصحيحة Z كتبنا :

$\exists\ X \in Z$ بحيث $X+1=2$

ونذكر ما تقدم بقولنا :

«يوجد في الاقل عنصر $X \in Z$ بحيث تكون المعادلة $X+1=2$ محققة».

[1-7-2] نفي العبارات المسورة :

عندما نريد نفي العبارات المسورة ننتبه الى الآتي:

«إن كل عبارة يجب أن تتصف بواحدة وواحدة فقط من الصفتين :

صائبة أو خاطئة».

- فلو أردنا مثلاً نفي العبارة :

«مهما يكن الوتر المرسوم في دائرة فإن العمود النازل عليه من مركز هذه الدائرة ينصفه»

فاننا نقول :

«يوجد في الاقل وتر واحد مرسوماً في هذه الدائرة بحيث أن العمود النازل عليه من مركزها لا ينصفه ».

-وإذا اردنا إثبات خطأ القول :

«كل عدد طبيعي يقبل القسمة على 2 يقبل القسمة على 6» فإنه يكفي أن نبرهن صواب القول:

«يوجد في الاقل عدد طبيعي واحد يقبل القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 6».

- وإذا أردنا نفي القول:

«يوجد في الاقل مثلث قائم واحد لا يحقق مبرهنة فيثاغورس».

قلنا «مهما يكن المثلث القائم فإنه يحقق مبرهنة فيثاغورس».

ينتج من الأمثلة التي قدمناها أن:

$\sim[\, \forall x \in X$ فأن $P(x)\,] \equiv \exists x \in X$ فأن $\sim P(x)$

$\sim[\, \exists x \in X$ فأن $P(x)\,] \equiv \forall x \in X$ فأن $\sim P(x)$



اِنفِ كلاً مما يأتي:

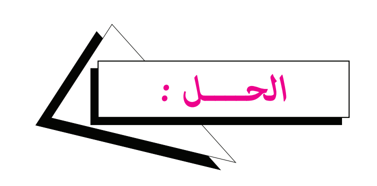
1) $\forall X$ فإن $P(X)$ حيث أن :

$P(X)$: إذا كان X عدداً طبيعياً فإن $X > 0$

2) $\exists X$ فإن $P(X)$ حيث أن :

$P(X)$: X عدد زوجي موجب

3) $[\, \exists X \in R : X+3 \geq 5\,] \vee P$



1) $\exists X$ فإن $\sim P(X) \equiv \sim [\forall X$ فإن $P(X)]$

$\sim P(X)$: $\exists X$ عدد طبيعي حيث $X \leq 0$

وبالكلام : يوجد عدد طبيعي أصغر أو يساوي صفراً .

2) $\forall X$ فإن $\sim P(X) \equiv \sim [\exists X$ فان $P(X)]$

$\sim P(X) : \forall X$ عدداً زوجياً فإن X غير موجب وبالكلام : مهما يكن X عدداً زوجياً فإن X غير موجب .

3) $(\forall X \in R : X+3 < 5) \wedge P \sim$

[1-7-3] التحصيل الحاصل Tautology :

اذا كان لدينا العبارة المنطقية P وكانت جميع الاحتمالات المنطقية لهذه العبارة صائبة فان P تسمى تحصيلاً حاصلاً .



لتكن P عبارة هل $P \vee \sim P$ تشكل تحصيلاً حاصلاً ؟



P	~ P	P ⋁ ~ P
T	F	T
F	T	T

∴ تشكل تحصيلاً حاصلاً .

ملاحظة : اذا كان جميع قيم الصواب خاطئة تدعى تناقض (Contradiction) .

تمرينات (3-1)

س1 /

اِنف كل عبارة من العبارات الآتية من دون اِستعمال ليس صحيحاً بدلها :

أ) جميع المثلثات المتشابهة متساوية الساقين.

ب) بعض المثلثات المتشابهة غير متطابقة .

جـ) إذا كان المثلث قائم الزاوية فإنه يكون متساوي الساقين .

د) بعض المعادلات ليس لها حل .

هـ) كل شكل رباعي مستطيل .

و) $Q: \forall X \in N : X^2 = 25$

ح) $P \wedge (\forall X \in R : X < 8)$

س2 /

بين صواب أو خطأ كل من العبارات الآتية :

أ) $\forall X$ ، فإن $P(X)$ حيث أن :

$P(X)$: إذا كان X عدداً طبيعياً فإن $X^2 = X$

ب) $\exists X$ فإن $P(X)$ حيث أن :

$P(X)$: X عدد طبيعي ، $X^2 = X$

جـ) $\forall X$ فإن $P(X)$ حيث أن :

$P(X)$: إذا كان X عدداً سالباً فإن X^2 عدد موجب .

د) P ، Q عبارتان منطقيتان : $Q \wedge P \to Q$ تحصيلاً حاصلاً .

هـ) P عبارة : $P \wedge \sim P$ تناقض

و) Q ، P عبارتان منطقيتان : $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$ تحصيلاً حاصلاً .

الفصل الثاني : المعادلات والمتباينات

2

[2-1] القيمة المطلقة ورسم الدالة $Y = |X|$

[2-2] حل المعادلات التي تحتوي على مطلق

[2-3] حل معادلتين أنيتين بمتغيرين

[2-4] الفترات

[2-5] حل المتباينة (المتراجحة) من الدرجة الأولى في متغير واحد

[2-6] حل المتباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد

الاهداف السلوكية

يهدف تدريس هذا الفصل الى تحقيق الاهداف الاتية:

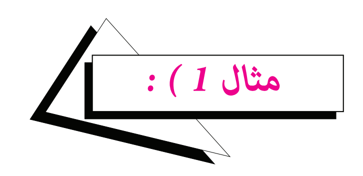
- يتعرف على القيمة المطلقة
- يحل معادلة تحتوي على مطلق
- يحل معادلتين آنيتين من الدرجة الثانية بمتغيرين
- يحل متباينة من الدرجة الاولى بمتغيرين
- يحل متباينة من الدرجة الثانية بمتغير واحد

[1 - 2] القيمة المطلقة *Absolute Value* :

تعريف (2 - 15)

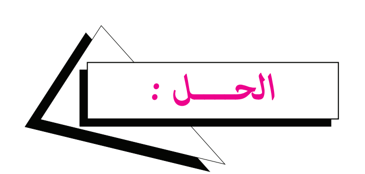
تُعرف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي X والتي نرمز لها بالرمز |X| كما يأتي :

$$|x| = \begin{cases} X, & \forall\ X > 0 \\ 0, & X = 0 \\ -X, & \forall\ X < 0 \end{cases}$$



عبر باستخدام تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي عن كل مما يأتي :

أ) $|3-\sqrt{10}|$ ب) $|X-3|$ حيث $X \in R$



أ) لان $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10}$

$\therefore |3-\sqrt{10}| = \sqrt{10} - 3 > 0$

ب) $|X-3| = \begin{cases} X-3, & \forall\ X > 3 \\ 0, & X = 3 \\ -X+3, & \forall\ X < 3 \end{cases}$

ينتج من التعريف (2 - 15) أن القيمة المطلقة تتمتع بالخواص الآتية :

1) $\forall\ X \in R$ فان $|X| \geq 0$

2) $\forall\ X \in R$ فان $|-X| = |X|$

3) $\forall\ X \in R$ فان $-|X| \leq X \leq |X|$

4) $\forall\ X \in R\ ,\ |X|^2 = X^2$

5) $\forall\ X \in R$ فان $|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y|$

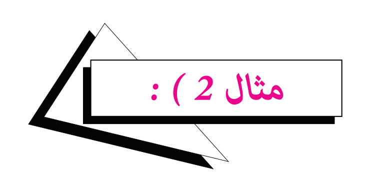
$\left|\frac{X}{Y}\right| = \frac{|X|}{|Y|}$ حيث $Y \neq 0$

6) $\forall\ X,Y \in R$ فان $|X + Y| \leq |X| + |Y|$

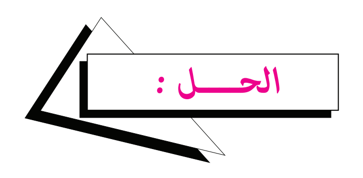
7) $\forall\ a > 0\ X \in R$ اذا كان $|X| \leq a$ فان $-a \leq X \leq a$

ملاحظة :

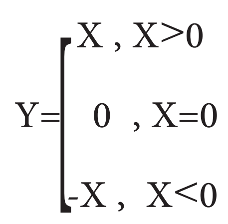
اعطِ لكل من Y ، X قيماً عددية وتأكد من صحة الخواص بنفسك .



إرسم $Y=|X|$



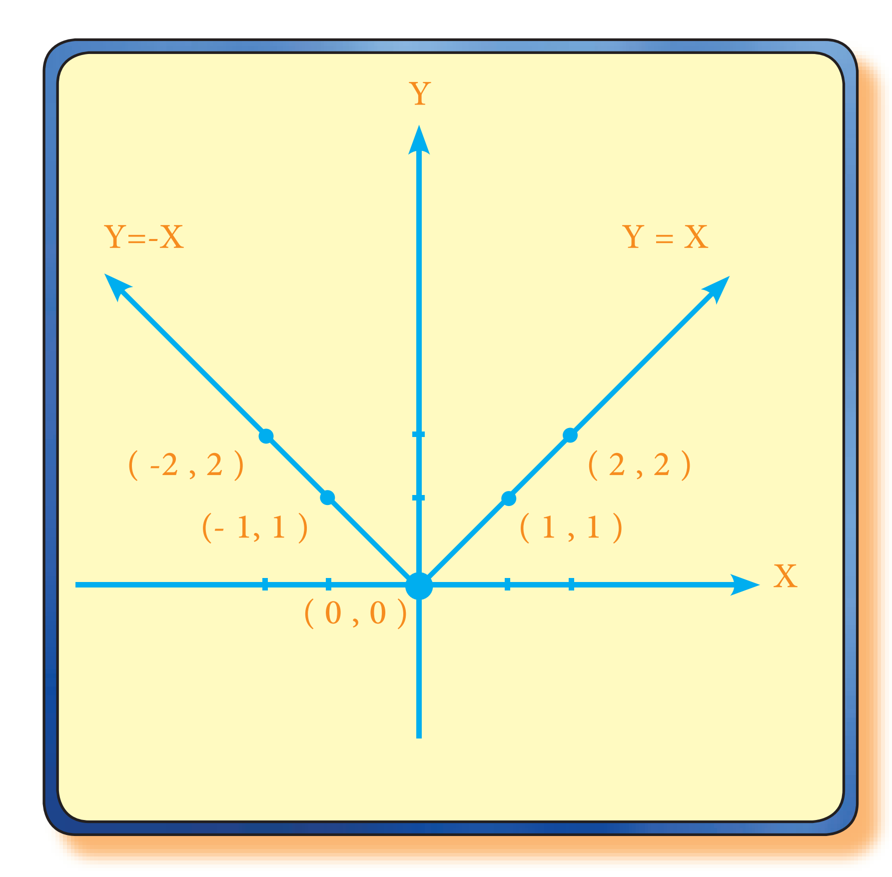
حسب تعريف (2-15)



$$Y=\begin{cases} X, & X>0 \\ 0, & X=0 \\ -X, & X<0 \end{cases}$$

أولاً : المستقيم $Y = X$ ، $x \geq 0$

X	Y	(X , Y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1 , 1)
2	2	(2 , 2)



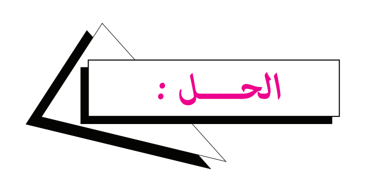
$Y=|X|$

ثانياً : المستقيم : $Y=-X$, $X<0$

X	Y	(X , Y)
0	0	فجوة (0 , 0)
-1	1	(-1 , 1)
-2	2	(-2 , 2)



إرسم $Y=|X-1|+3$



حسب تعريف (2-15)

$$Y=\begin{cases}(X-1)+3, & \forall X\geq 1\\(-X+1)+3, & \forall X<1\end{cases}$$

$$\therefore\quad Y=\begin{cases}X+2, & \forall X\geq 1\\-X+4, & \forall X<1\end{cases}$$

اولاً : المستقيم

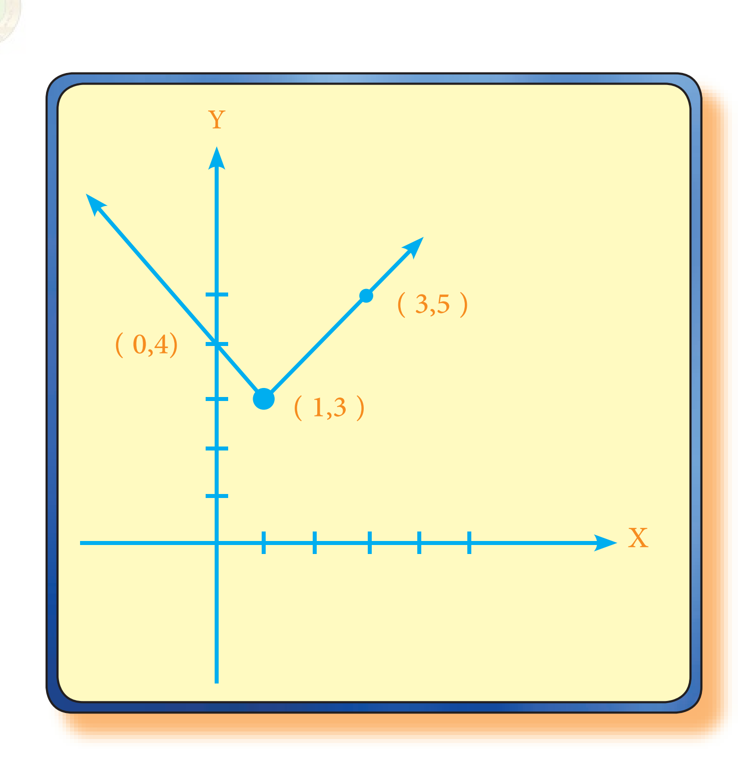
$\forall X\geq 1,\ Y=X+2$

X	Y	(Y , X)
1	3	(1 , 3)
3	5	(3 , 5)

ثانياً : المستقيم

$\forall X<1,\ Y=-X+4$

X	Y	(X, Y)
1	3	فجوة (1 , 3)
0	4	(0 , 4)

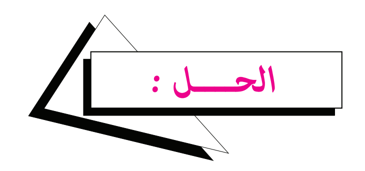


$Y=|X-1|+3$

[2 - 2] حل المعادلات التي تحتوي على مطلق :



جد مجموعة الحل للمعادلة : $|3X+6|=9$ حيث $X \in R$.



نستنتج من تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي أن:

$$|3X+6| = \begin{cases} 3X+6 & \text{إذا كان } 3X+6 \geq 0 \text{ اي } X \geq -2 \\ -(3X+6) & \text{إذا كان } 3X+6 < 0 \text{ اي } X < -2 \end{cases}$$

إن هذه المعادلة تكافيء النظام:

$3X+6=9$ مجموعة التعويض هي $\{X: X \geq -2\}$ .... (1)

$-3X-6=9$ مجموعة التعويض هي $\{X: X < -2\}$ ....(2)

يمكننا أَن نُعِدَّ هذا النظام نظام معادلتين بالمتغيرين x ،y . حيث معامل y فيها يساوي الصفر .

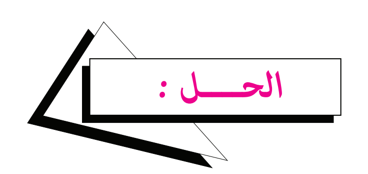
إن مجموعة حل هاتين المعادلتين هي :

$S_1 = \{1\}$ ، $S_2 = \{-5\}$

$\therefore$ مجموعة حل النظام هي $S = S_1 \cup S_2 = \{1, -5\}$.



جد مجموعة حل المعادلة : $X^2 |X| - 8 = 0$ ، $\forall X \in R$.



من تعريف القيمة المطلقة فان المعادلة $X^2 |X| - 8 = 0$ تكافىء النظام :

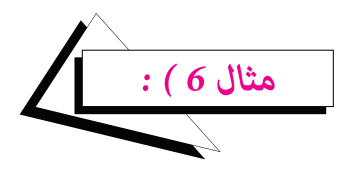
* $X^3 - 8 = 0 , \forall X \geq 0 \Rightarrow X^3 = 8 \Rightarrow X = 2$

$S_1 = \{2\}$

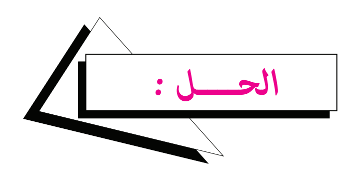
* $- X^3 - 8 = 0 , \forall X < 0 \Rightarrow X^3 = - 8 \Rightarrow X = -2$

$S_2 = \{-2\}$

$S = S_1 \cup S_2 = \{2 , -2\}$.



جد مجموعة حل المعادلة : $X^2 + |X| - 12 = 0$ ، $\forall X \in R$.



من تعريف القيمة المطلقة فان المعادلة $X^2 + |X| - 12 = 0$ تكافىء النظام :

* $X^2 + X - 12 = 0 , \forall X \geq 0 \Rightarrow (X + 4)(X - 3) = 0$

اما $X = -4$ يهمل لماذا ؟ او $X = 3$

$\therefore S_1 = \{3\}$

* $X^2 - X - 12 = 0 , \forall X < 0 \Rightarrow (X - 4)(X + 3) = 0$

اما $X = 4$ يهمل لماذا ؟ او $X = -3$

$\therefore S_2 = \{-3\}$

$S = S_1 \cup S_2 = \{3 , -3\}$

[3 - 2] حل معادلتين آنيتين بمتغيرين.

لقد تعلم الطالب حل نظام مؤلف من معادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين بيانياً، وحينذاك وضحنا الآتي اذا كان S_1 حلاً للمعادلة الأولى ، S_2 حلاً للمعادلة الثانية ، فإن مجموعة حل النظام $S = S_1 \cap S_2$. اذا كانت المعادلتين مربوطتين باداة الربط و

أما إذا كان الرابط أو فإنّ حل النظام هو $S = S_1 \cup S_2$.



إذا كانت R هي مجموعة التعويض لكل من X ، Y فجد مجموعة الحل بطريقتين :

تحليلياً و بيانياً

$X - 2Y = 5 \ldots\ldots (1)$

$2X + Y = 0 \ldots\ldots (2)$



تحليلياً : بضرب طرفي المعادلة (2) بالعدد 2 :

$X - 2Y = 5 \ldots\ldots (1)$

$4X + 2Y = 0 \ldots\ldots (2)$ بالجمع

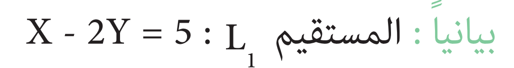
$5X=5 \Longrightarrow X = 1$

نعوض في (1):

$1 - 2Y = 5$

$\Longrightarrow Y = -2$

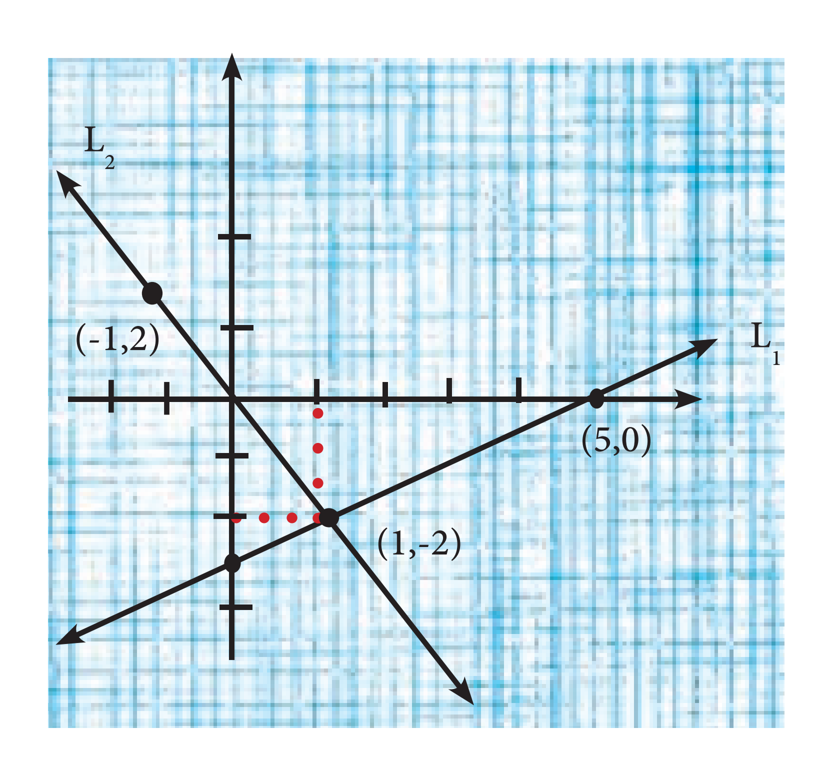
∴ مج = {(1 ,- 2)}. وهي تمثل نقطة تقاطع المستقيمين .



X	Y	(X , Y)
0	-5/2	(0 , -5/2)
1	-2	(1 , -2)
5	0	(5 , 0)

المستقيم L_2 : 2X + Y = 0

X	Y	X, Y
0	0	(0,0)
1	-2	(1 ,-2)
-1	2	(-1 ,2)

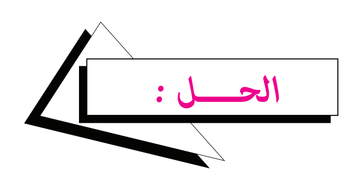




اذا كانت R هي مجموعة التعويض لكل من x.y فجد مجموعة حل النظام

$X - Y = 1$

$X^2 + Y^2 = 13$



هذا النظام يحل بطريقة التعويض حيث نجد x بدلالة y او بالعكس حسب المعادلة فيكون

$X = 1 + Y$ تعوض في المعادلة الثانية فيكون

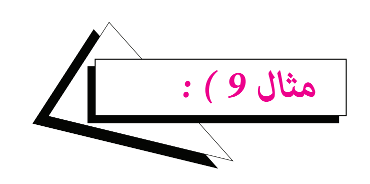
$(1+y)^2 + y^2 = 13 \Rightarrow 2y^2 + 2y - 12 = 0$ بالقسمة على 2

$y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow (y+3)(y-2) = 0$

$y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow (-2,3)$

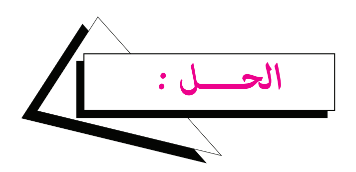
$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow (3,2)$

$\therefore S = \{(-2,-3),(3,2)\}$



حل المثال الآتي اذا كانت مجموعة التعويض R لكل من x,y بطريقة الحذف

$$2x^2-3y^2=-46\ ,\ x^2+y^2=17$$



بما ان المعادلتين من نفس الدرجة، اذن يمكن حل النظام بطريقتين الحذف والتعويض (يترك للطالب)

$x^2+y^2=17....1$

$2x^2-3y^2=-46....2$

---------------------------- **(بضرب المعادلة الاولى في 3)**

$3x^2+3y^2=51$

$2x^2-3y^2=-46$

---------------------- **بالجمع**

$5x^2=5\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\mp 1$

$x=1\ \Rightarrow(1)^2+y^2=17\Rightarrow y^2=16\Rightarrow y=\mp 4\Rightarrow(1,4),(1,-4)$

$x=-1\ \Rightarrow(-1)^2+y^2=17\Rightarrow y^2=16\Rightarrow y=\mp 4\Rightarrow(-1,4),(-1,-4)$

$S=\{(1,4),(1,-4),(-1,4),(-1,-4)\}$

الخلاصة

1) اذا كانت المعادلتين من نفس الدرجة (الاولى او الثانية) فتحل بطريقتي

* الحذف   * التعويض

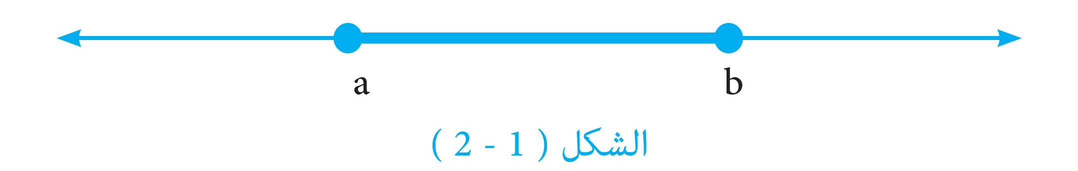
2) اذا كانت احدهما من الدرجة الاولى والاخرى من الدرجة الثانية فتحل بطريقة التعويض

[2 - 4] الفترات *Intervals* :

ليكن $a < b$ ، $a , b \in R$

1) تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية :

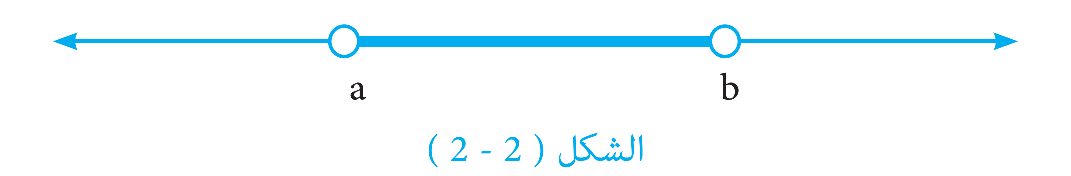
$\{ X : X \in R , a \leq X \leq b \}$ الفترة المغلقة Closed Interval من a الى b ونرمز لها بالرمز [a , b] وتمثل على خط الأعداد كما في الشكل (1 - 2) حيث رمزنا لنقطة البداية للقطعة المستقيمة التي تمثل الفترة المغلقة باحداثيها (a) ولنقطة النهاية لهذه القطعة باحداثيها (b) لقد أهملنا على هذا الشكل ذكر نقطة الأصل (و) يلاحظ وجود تقابل بين مجموعة الأعداد الحقيقية المنتمية إلى الفترة [a , b] ومجموعة نقاط القطعة المستقيمة a b



الشكل (1 - 2)

2) نسمي المجموعة

$(a,b) = \{X : X \in R , a < X < b\}$ الفترة المفتوحة Open Interval من (a) الى (b) وتمثل على خط الأعداد الحقيقية كما في الشكل (2 - 2)



الشكل (2 - 2)

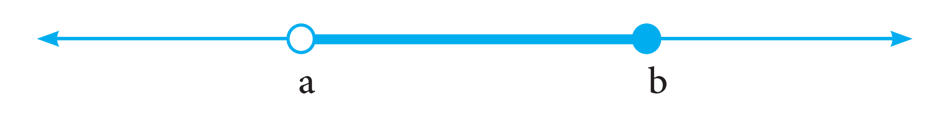
يلاحظ في هذه الحالة أن $a \notin (a , b) , b \notin (a , b)$ والدائرتين حول العددين a , b في الشكل تدلان على ذلك .

3) نسمي كلاً من :

$(a , b] = \{ X : X \in R ، a < X \leq b \}$

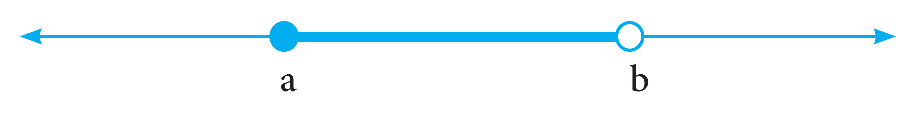
$[a , b) = \{ X : X \in R ، a \leq X < b \}$

الفترة نصف المغلقة (أو نصف المفتوحة Half Open) حيث $a < b$ وتمثل المجموعة الأول كما في الشكل (3 - 2)



الشكل (3 - 2)

وتمثل المجموعة الثانية كما في الشكل (4 - 2)



الشكل (4 - 2)

4) مجموعة الأعداد الحقيقية التي تزيد على العدد الحقيقي (a) أو تساويه هي :

$\{ X : X \in R ، X \geq a \}$ وتمثلها كما في الشكل (5 - 2)

كما أن المجموعة $\{ X : X \in R ، X > a \}$ يمثلها الشكل (6 - 2)



الشكل (5 - 2)   الشكل (6 - 2)

5) مجموعة الأعداد الحقيقية التي تساوي العدد الحقيقي (a) أو تصغره هي

$\{ X : X \in R ، X \leq a \}$

فيمثلها الشكل (7 - 2)

اما المجموعة $\{ X : X \in R ، X < a \}$

فيمثلها الشكل (8 - 2)

ملاحظة :

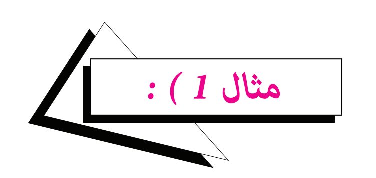
المجموعة في (4) و (5) تدعى مجموعات عددية غير محددة (شعاع)



الشكل (7 - 2)



الشكل (8 - 2)

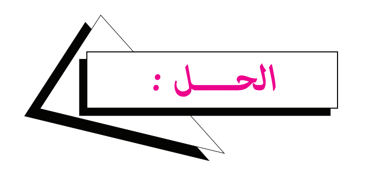


لتكن $Y = [\,3\,,8\,]$ ، $X = [\,1\,,6\,]$ مثل على خط الأعداد

1) $X \cap Y$ 2) $X \cup Y$

3) $X - Y$ 4) $Y - X$

ثم اكتب الناتج على شكل فترة



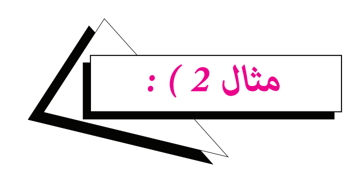
1 3 6 8

1) $X \cap Y = [\,3\,,6\,]$

2) $X \cup Y = [\,1\,,8\,]$

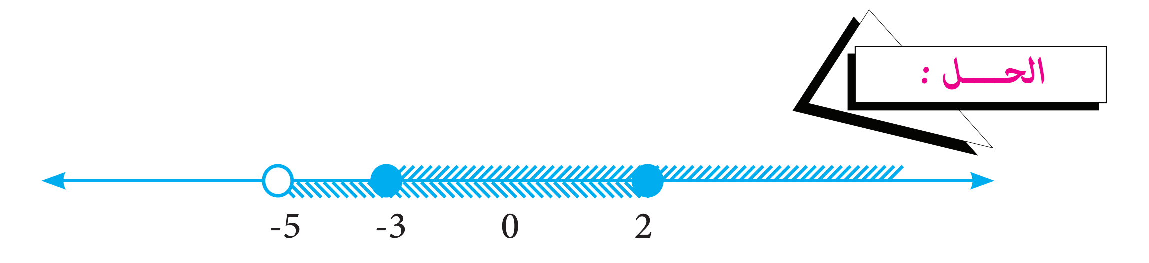
3) $X - Y = [\,1\,,3\,)$

4) $Y - X = (\,6\,,8\,]$



مثل 1) $(\,-5\,,2\,] \cup \{X : X \geq -3\}$ على خط الأعداد

2) $(\,-5\,,2] \cap \{X : X \geq -3\}$ على خط الأعداد



$\therefore$ 1) $\{X : X \geq -3\} \cup (\,-5\,,2\,] = \{X : X > -5\}$

2) $\{X : X \geq -3\} \cap (\,-5\,,2\,] = [-3\,,2\,]$

[5 - 2] حل المتباينة (المتراجحة) من الدرجة الاولى في متغير واحد :

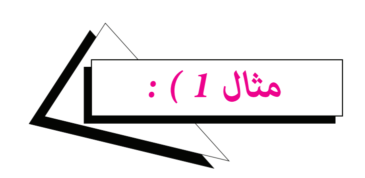
إن المتباينة التي تحوي متغير (X) والتي تكتب بالشكل: $f(X) < g(X)$ حيث $f(X)$ ، $g(X)$ جملتان مفتوحتان تسمى متباينة Inequality في متغير واحد (X) .

وكما تعلم من دراستك السابقة إذا كانت مجموعة القيم التي أعطيت لـ (X) في هذه المتباينة وجعلها عبارة صائبة ، نقول أوجدنا مجموعة حل هذه المتباينة . وتُعرف المتباينات المتكافئة كما عُرفت المعادلاتُ المتكافئة .

تعريف (16 - 2)

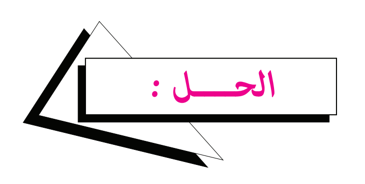
نقول عن المتباينة $f(X) < g(X)$ متباينة مكافئة للمتباينة $h(X) < I(X)$ إذا كان لهما مجموعة الحل نفسها.

سنهتم في هذا البند بحل المتباينات التي يكون فيها كل من $f(X)$ ، $g(X)$ كثيرة الحدود .



جد مجموعة الحل للمتباينة : $3X + 1 < X + 5$

إذا كانت مجموعة التعويض هي R ، وضع مجموعة الحل على خط الأعداد .



$3X + 1 < X + 5$

$3X + 1 + (-X) < X + 5 + (-X)$

$\Leftarrow$ $2X + 1 < 5$ خواص المتباينات

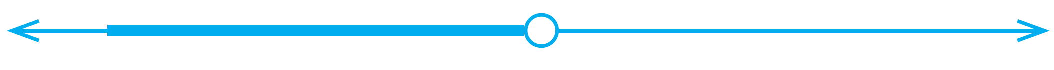
$\Leftarrow$ $2X + 1 + (-1) < 5 + (-1)$

$\Leftarrow$ $2X < 4$ خواص المتباينات .

$\Leftarrow \quad (2X)(\frac{1}{2}) < 4(\frac{1}{2})$

$\Leftarrow \quad X < 2$ خواص الحقل .

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{ X : X \in R ، X < 2 \}$



إذا ربطنا متباينتين بالرابط و فإن قيمة X التي تحقق هذا النظام المؤلف من متباينتين من الدرجة الأولى في متغير واحد يجب أن تنتمي إلى S_1 مجموعة حل المتباينة الأولى وإلى S_2 مجموعة حل المتباينة الثانية . أي إلى $S_1 \cap S_2$: وهذا يعني:

أنّ مجموعة حل النظام المكون من المتباينتين والرابط و هي :

$S = S_1 \cap S_2$

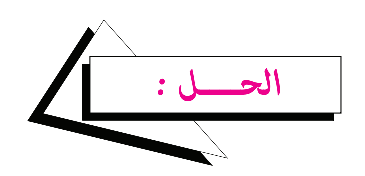
ويمكننا أن نستنتج بشكل مشابه أن مجموعة حل النظام المكون من متباينتين والرابط أو هي

$S = S_1 \cup S_2$



إذا كانت مجموعة التعويض هي (R) جد مجموعة الحل للنظام :

$5X + 11 < 1$ و $2X + 3 < 6$ مثّل إجابتك على خط الأعداد .



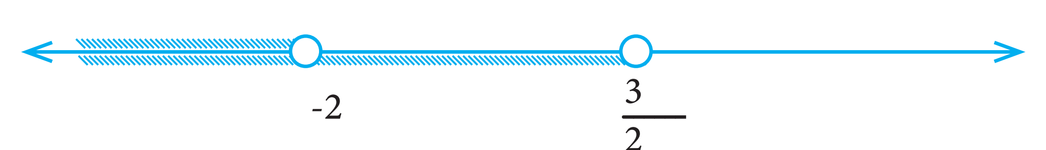
مجموعة الحل للمتباينة الأولى هي $S_1 = \{ X : X < -2 \}$

مجموعة الحل للمتباينة الثانية هي $S_2 = \{X:X < \frac{3}{2}\}$

مجموعة الحل لنظام المتباينتين هي : S

$$S = S_1 \cap S_2 = \{ X : X < -2 \} \cap \{ X : X < \frac{3}{2} \}$$

$S = \{ X : < -2$ و $\frac{3}{2} > X \}$

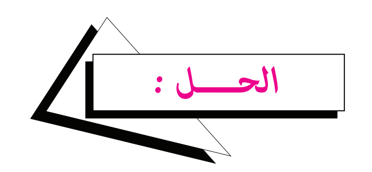


العناصر المشتركة بين S_2 ، S_1 هي S_1 نفسها

$$S_1 \cap S_2 = S_1 = \{ X : X < -2 , X \in R \}$$



عوض الرابط و بالرابط أو في المثال السابق ثم جد مجموعة الحل :



مجموعة الحل للنظام : $5x + 11 < 1$ أو $2X + 3 < 6$

$S_2 \cup S_1 = \{X : X < \frac{3}{2}$ أو $X < -2\}$

$$S = \{X : X \in R , X < \frac{3}{2}\}$$



نلاحظ أن العناصر الموجودة في S_1 أو S_2 أو في كليهما معاً هي S_2



إذا كان (R) هو مجموعة التعويض جد مجموعة الحل للمتباينة $5 < |X-2|$

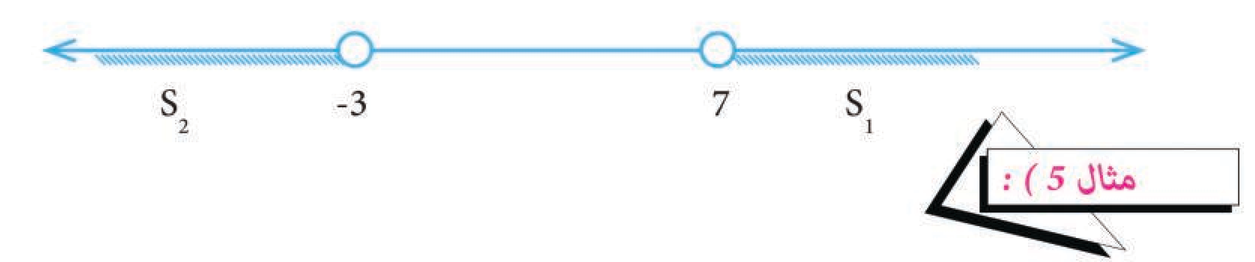


$$|X-2| = \begin{cases} X-2, & \forall \; X \geq 2 \\ \text{أو} & \\ 2-X, & \forall \; X < 2 \end{cases}$$

$\therefore$ $5 < |X-2| \Leftrightarrow 5 < X-2$ أو $5 < 2-X$

وبحل هذا النظام نجد أن مجموعة الحل المطلوبة هي :

$$S_1 \cup S_2 = \{X : X \in R ، X > 7\} \cup \{X : X \in R ، X < -3\}$$





حل المتباينة $2 \quad |x+1|$ حيث $x \in R$

الحـــل :

لاحظ ان هذه المتباينة يمكن حلها مباشرة حسب خاصية (7) ص52

فيكون $2 \quad |x+1| \quad 2 \Rightarrow -2 \leq x+1 \leq 2$

باضافة (1-) الى حدود المتباينة ينتج

$$-2+(-1) \leq x+1+(-1) \leq 2+(-1)$$

$$-3 \leq x \leq 1$$

$$\therefore s = [-3,1]$$

[2 - 6] حل متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد



مبرهنة

إذا كان (a) عدداً حقيقياً موجباً فإن :

1) مجموعة حل المتباينة $a^2 \leq X^2$ هي الفترة [a , a -]

2) مجموعة حل المتباينة $X^2 < a^2$ هي الفترة (a , a -)

البرهان 2) $X^2 < a^2 \Leftarrow X^2 - a^2 < 0 \Leftarrow (X - a)(X + a) < 0$

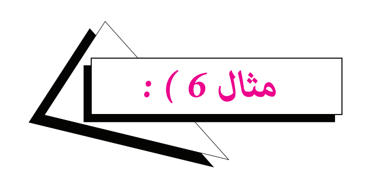
ومن خواص الحقل المرتب نستنتج القاعدة : اذا كان a . b > صفر فـــان { اما (a>0 و b <0) أو (a <0 و b >0) }

[(X - a) > 0 و (X+ a) <0] أو [(X - a) < 0 و (X +a) > 0]

$\Longrightarrow$ [X > a و X < - a] أو [X < a و X>-a]

$\Longrightarrow (-a , a) \cup \phi = (-a , a)$

وبطريقة مماثلة يمكن برهنة (1) والتي نتركها للطالب .



مثال 6) :

إذا كان $X^2 < 9$ فإن مجموعة الحل للمتباينة هي :

(-3,3) . واذا كان $X^2 \leq 9$ فإن مجموعة الحل للمتباينة هي [3 ,3 -]

أما مجموعة حل المتباينة $X^2 > 9$ فهي مجموعة حلول $X^2 \leq 9$ / R

أي [3, 3-] / R

ومجموعة حلول المتباينة $X^2 \geq 9$ هي مجموعة حلول المتباينة $X^2 < 9$ / R

أي (3, 3-) / SR



جد مجموعة حلول المتباينة : $7 > |2X+5| \geq 5$

الحـــل :

$$|2X+5| = \begin{cases} 2X+5, & \forall \; X \geq \frac{-5}{2} \\ -(2X+5), & \forall \; X < \frac{-5}{2} \end{cases}$$

إن المتباينة $7 > |2X+5| \geq 5$ تكافئ النظام :

$[7 > 2X+5 \geq 5]$ أو $[7 > -(2X+5) \geq 5]$

$\Leftarrow$ $[2 > 2X \geq 0]$ أو $[12 > -2X \geq 10]$

$\Leftarrow$ $[1 > X \geq 0]$ أو $[-6 < X \leq -5]$

مجموعة الحل $= [0,1) \cup (-6,-5]$

الخلاصة

لحل المتباينة من الدرجة الاولى في متغير واحد:

* نعرف المطلق ان وجد

* نستخدم خواص حقل الاعداد الحقيقية:

(اضافة النظير الجمعي ←خاصية التجميع←العنصر المحايد على عملية الجمع (0)

← الضرب في النظير الضربي ← خاصية التجميع ← العنصر المحايد على عملية عملية الضرب (1))

* بعد هذه السلسلة من الخطوات نحصل على حل المتباينة ضمن مجموعة الاعداد الحقيقية R



تمرينات (2-4)

س1 /

اذا كان $A= [-2 , 5)$

$B = \{ X: X \geq 1 \}$

جد $B - A$ ، $A - B$ ، $A \cap B$ ، $A \cup B$

س2 /

أ) ارسم الدالة $Y = |X + 2| - 5$

ب) $y = 3 - |x + 1|$

س3 /

جد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية ثم تحقق من الحل :

أ) $|4X + 3| = 1$

ب) $X|X| + 4 = 0$

جـ) $X^2 - 2|X| - 15 = 0$

د) $|X^2 + 4| = 29$

هـ) $x|x + 2| = 3$

و) $|2x+1| = x$

س4 /

جد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين:

أ) $X - Y = -1$ ، $2X + Y = 4$ (بيانياً)

ب) $2X + 3Y = 13$ ، $4X + 3Y = 17$ (تحليلياً)

جـ) $5X^2 + 2Y^2 = 53$ ، $X - Y = 1$

د) $3X^2 + 2Y^2 = 107$ ، $2X^2 - Y^2 = 34$

س5 /

جد مجموعة حلول كل من المتباينات الآتية :

أ) $|X-6| \leq 1$

ب) $2 \leq |X+1| \leq 4$

جـ) $-3 \leq |2X - 3| - 12 < -9$

د) $2X^2 \leq 8$

هـ) $3X^2 - 27 > 0$

3
الفصل الثالث : الأسس والجذور

[3-1] الأسس بأعداد صحيحة
[3-2] حل المعادلات الأسية البسيطة
[3-3] الجذور والعمليات عليها
[3-4] العددان المترافقان $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$
[3-5] الدوال الحقيقية

الاهداف السلوكية

ينبغي ان يصبح في نهاية دراسته لهذا الموضوع قادراً على ان:

- يتعرف على قوانين الاسس باعداد صحيحة
- يحل تمارين تحتوي على اسس
- يحل معادلات اسية بسيطة
- يتعرف على الجذور
- يحل اسئلة تحتوي على جذور
- يتعرف على العدد المرافق
- يتعرف على الدوال الحقيقية ويجد اوسع مجال للدالة
- يتعرف على سلوك الدالة الاسية
- يرسم الدالة الاسية
- يمثل بعض الدوال الحقيقية

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
● الأسس	a^x
● الجذور	$\sqrt[n]{\ }$
● الدالة الأسية	$f_a(x)=a^x$
● العددان المترافقان	$\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$

مقدمة : عرفت الرياضيات باركان ثلاثة هي :

1) الحساب

2) الجذر والمقابلة

3) الهندسة

ولم تعرف بشكلها المتكامل والمترابط إلا في نهاية القرن الثامن عشر وبداية القرن التاسع عشر . اكتشف علماء العرب والمسلمين الكثير من العلاقات بين الاركان الثلاثة من جهة وعلاقتها بالمنطق من جهة اخرى ومنهم :

* عمر بن ابراهيم الخيامي (515 - 435 هـ) = (1122 - 1044 م) ولد وتوفى في نيسابور في ايران ومن اهم كتبه في الهندسة « رسالة في شرح ما شكل من مصادرات اقليدس » وفي الجبر كتابه « مقالة في الجبر والمقابلة » .

* ابو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي (235 - 164 هـ) = (850 - 781 م) ولد في جنوب اقليم خوارزم (اوزبكستان حالياً) ثم انتقل الى بغداد ومن اشهر كتبه في الجبر « الجبر والمقابلة » كما انه اكتشف طرقاً جبرية لحل معادلات من الدرجة الاولى والثانية في متغير واحد او متغيرين .

تمهيد لما سبقت دراسته : درسنا في المرحلة المتوسطة كلاً من الأسس والجذور . حيث تعرفنا على قوة عدد عندما يكون الأس عدداً طبيعياً ، كما تعرفنا على الجذر التربيعي لعدد حقيقي غير سالب ، وعلى خصائص الجذور التربيعية والجذور التكعيبية .

[1 - 3] الأسس أعداد صحيحة



تعريف (1 - 3)

إذا كان $n \in Z$ ، $a \in R$ فان

1) $a^n = a \times a \times \ldots\ldots \times a$ (n مرة a مضروبة بنفسها)

2) الحالة الخاصة $a^0 = 1$

3) $a \neq 0$ ، $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ، $a^{-n} = (a^{-1})^n$

خصائص الأسس :

$\forall a , b \in R , \forall n , m \in Z$ (Z مجموعة الأعداد الصحيحة) $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ فان :

1) $a^n \times a^m = a^{m+n}$ [عند الضرب تُجمع الاسس بشرط تشابه الأساسات]

2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

3) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ [عند القسمة تطرح الاسس بشرط تشابه الأساسات]

4) $(a^m)^n = a^{mn}$ [قانون الرفع]

5) $(a . b)^n = a^n . b^n$

6) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

ملاحظة :

نسمي الرمز a^n القوة النونية للعدد a ، ونسمي العدد a أساساً والعدد n أُسّاً ، ونقول إن a مرفوع إلى الاس n .



تعريف (2 - 3)

اذا كان $n > 1$ ، $n \in N$ ، $a \in R$ فأن كل عدد حقيقي X يحقق المعادلة:
$X^n = a$ يسمى جذراً نونياً للعدد (a) ويرمز له بالرمز $\sqrt[n]{a}$ أو $a^{\frac{1}{n}}$

وقد سبق ان استنتجنا من هذا التعريف النتائج الاتية :

1) $\sqrt[n]{0} = 0$ ، $\forall n \in N$ ، $n > 1$

2) اذا كان (n) عدداً طبيعياً زوجياً وكان (a) عدداً حقيقياً موجباً فان كلا من العددين
$X = \sqrt[n]{a}$ ، $X = -\sqrt[n]{a}$ يحقق المعادلة $X^n = a$

3) اذا كان (n) عدداً طبيعياً زوجياً وكان (a) عدداً حقيقياً سالباً فانه لايوجد عدد حقيقي
يحقق المعادلة $X^n = a$ (لان X^n موجب $\forall X \in R$)

4) اذا كان (n) عدداً طبيعياً فردياً وكان (a) عدداً حقيقياً فانه يوجد عدد حقيقي واحد
يحقق المعادلة $X^n = a$



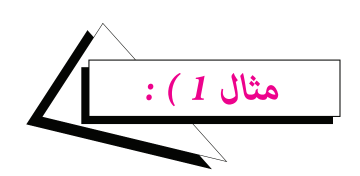
مبرهنة (1 - 3)

اذا كان $n > 1$ ، $n \in N$ ، $a , b \in R$ فان

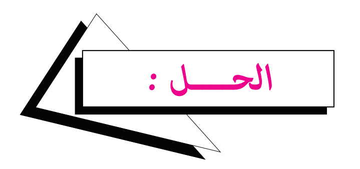
1) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ، (حيث $a \geq 0$ ، $b \geq 0$ اذا كان (n) عدداً زوجياً)

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

- اذا كان n عددا زوجيا: $0 \leq a , 0 < b$
- اذا كان n عددا فرديا: $a \in R , b \in R / \{0\}$



جد قيمة $\frac{8^{-3} \times 18^{2}}{81 \times 16^{-2}}$



$$\frac{8^{-3} \times 18^{2}}{81 \times 16^{-2}} = \frac{(2^{3})^{-3} \times (3^{2} \times 2)^{2}}{3^{4} \times (2^{4})^{-2}} = \frac{2^{-9} \times 2^{2} \times 3^{4}}{3^{4} \times 2^{-8}}$$

$$3^{4-4} \times 2^{-9+2+8} = 3^{0} \times 2^{1} = 1 \times 2 = 2$$

ملاحظة :

$a^{m} = (-a)^{m}$ ... اذا كان m عدداً زوجياً.

$-a^{m}$ ... اذا كان m عدداً فردياً.

مثل

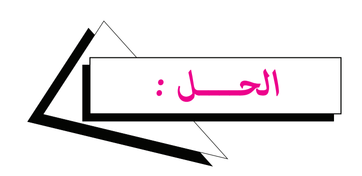
$(-1)^{25} = -1$

$(-1)^{64} = 1$



اذا كان $m ، n \in Z$ فاثبت ان:

$$\frac{125 \times 15^{m-2} \times 25^{m+n}}{75^{m} \times 5^{2n+m}} = \frac{5}{9}$$



الطرف الايسر $= \frac{5^{3} \times (5 \times 3)^{m-2} \times (5^{2})^{m+n}}{(3 \times 5^{2})^{m} \times 5^{2n+m}} = \frac{125 \times 15^{m-2} \times 25^{m+n}}{75^{m} \times 5^{2n+m}}$

$$= \frac{5^{3} \times 5^{m-2} \times 3^{m-2} \times 5^{2m+2n}}{3^{m} \times 5^{2m} \times 5^{2n+m}}$$

$$= 5^{3+m-2+2m+2n-2m-2n-m} \times 3^{m-2-m}$$

$= 5 \times 3^{-2} = 5 \times \frac{1}{3^{2}} = \frac{5}{9} =$ الطرف الايمن



تمرينات (3-1)

س1 /

جد ناتج مايلي:

أ) $(9)^0+(8)^0$ ب) $(3)^{-1}+(2)^{-1}$ جـ) $16+(16)^{-1}$ د) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

هـ) $\dfrac{2^{-3}\times 4^{-5}}{6^{-1}\times 3^{3}}$ و) $\dfrac{10^{3}\times 4^{7}}{10^{-5}\times 2^{5}}$ ز) $(\sqrt{27})^{\frac{5}{3}}$ ح) $3a^0$ ، $(a\neq 0)$

ط) $(3a)^0$ ي) $(a+b)^0$ ، $(a+b\neq 0)$ ك) $(\sqrt[5]{-32})^{-3}$

س2 /

اكتب المقادير الاتية بابسط صورة :

أ) $\sqrt{(\frac{3}{4})^2\ \frac{20a^3}{45a}}$ ب) $[\dfrac{(-a)^3\ \sqrt[6]{729}}{3a}]^2\ (-a)^4$

جـ) $\sqrt{25b^2c^{-8}}$ ، $c\neq 0$ د) $\dfrac{3x^{-5}\ .\ y^2}{2^{-1}\ y^{-2}}$ ، $x\neq 0$

س3 /

اكتب كلاً من العبارات الاتية بشكل يكون المقام فيها (1) ولايكون تحت الجذر مستخدماً الاسس :

أ) $\dfrac{bc}{d}$ ، $d\neq 0$ ب) $\dfrac{1}{b^5}$ ، $b\neq 0$ جـ) $\sqrt[5]{x}$

د) $\dfrac{4b^2}{b^2c^{-3}}$ ، $b\neq 0$ هـ) $\dfrac{1}{b^2+c^2}$ و) $\sqrt[3]{x}\times\sqrt[4]{x}$ ، $x\geq 0$

س4 /

اذا كان $a \in R$ وان m عدداً صحيحاً زوجياً فاي مما ياتي صائبة؟

أ) $a^m > 0$ ب) $a^m < 0$ جـ) $a^m \geq 0$ د) $a^m \leq 0$

س5 /

اذا كان $a \in R$ ، a عدد سالب ,وانm عدداً صحيحاً فردياً فاي مما ياتي صائبة؟

أ) $a^m > 0$ ب) $a^m < 0$ جـ) $a^m \geq 0$ د) $a^m \leq 0$

س6 /

برهن ان: أ) $a^{(x-y)z} \cdot a^{(z-x)y} \cdot a^{(y-z)x} = 1$

ب) $\left[x^{n^2-1} \div x^{n-1}\right]^{\frac{1}{n}} = x^{n-1}$

س7 /

برهن ان : $\frac{1}{1+a^{b-c}} + \frac{1}{1+a^{c-b}} = 1$

س8 /

اثبت ان : $\frac{11}{15} = \frac{5 \times 3^{2n} - 4 \times 3^{2n-1}}{2 \times 3^{2n+1} - 3^{2n}}$

س9 /

اختصر كلاً مما ياتي الى ابسط صورة :

$\frac{3^{2+n} + 3^{n+1}}{3^n - 3^{n-1}}$ ، $\frac{6^{4n-1} \times 27^{2n}}{2^{n+1} \times 8^{n-1} \times 9^{n+2}}$

س10 /

برهن ان : $\left[\frac{\left(9^{n+\frac{1}{4}}\right) \times \sqrt{3 \times 3^n}}{3\sqrt{3^{-n}}}\right]^{\frac{1}{n}} = 27$

[3 - 2] حل المعادلات الاسية البسيطة

تتضمن المعادلة الاسية Exponential Equation متغير في الاس. ولحل هذا النوع من المعادلات ندرج الملاحظات الاتية:

1) في اي معادلة: ((اذا تساوت الاساسات فسوف تتســـــاوي الاسس بشرط الاساس $\neq 1$))

اي : اذا كان $a^x = a^y \Rightarrow x = y , a \neq 1$

2) اذا كان $x^n = y^n$ فان $x = y$ اذا كانت n فردية

$x = \mp y$ اذا كانت n زوجية

3) اذا كان $x^n = y^m \Leftarrow n = m =$ صفر

و الان لاحظ حل كلا من المعادلات الاتية :

أ) $(x+2)^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{27}} \Rightarrow (x+2)^{-\frac{3}{5}} = 3^{-\frac{3}{5}}$

$x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$

$\therefore$ مج $= \{1\}$

ب) $x^{\frac{2}{3}} = 3^{-2}$

$x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3^2}$

بجذر الطرفين $(x^{\frac{1}{3}})^2 = (\frac{1}{3})^2$

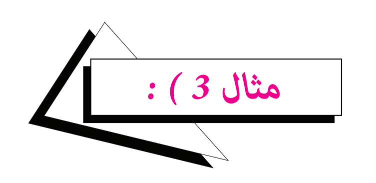
بتكعيب الطرفين $x^{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{3}$

$(x^{\frac{1}{3}})^3 = \pm (\frac{1}{3})^3$

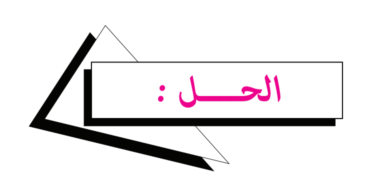
$x = \pm \frac{1}{3^3}$

$x = \pm \frac{1}{27}$

$\therefore$ مج $= \{\pm \frac{1}{27}\}$



حل المعادلة : $2^{x^2-2x+1} = 4^{x+3}$



$2^{x^2-2x+1} = 2^{2(x+3)}$ نجعل الاساس نفسه في طرفي المعادلة

$\therefore\ x^2 - 2x + 1 = 2x + 6$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

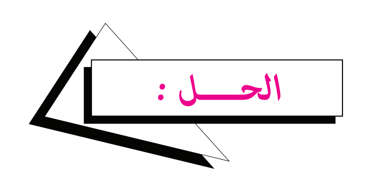
$(x-5)(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 5 ، x = -1$

$\therefore$ مجموعة الحلول = $\{-1 , 5\}$

وتسمى مثل هذه المعادلة المعادلة الاسية لان الاس متغيرة.



حل المعادلة: $3^{2x+1} - 4\times3^{x+2} = -81$



$3^{2x} \times 3 - 4 \times 3^x \times 3^2 + 81 = 0 \div 3$

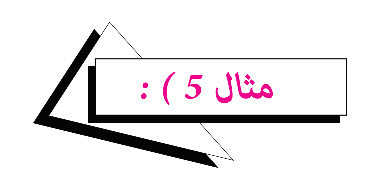
$3^{2x} - 12 \times 3^x + 27 = 0$

$(3^x - 3)(3^x - 9) = 0$

اما $3^x = 9 \Longrightarrow 3^x = 3^2 \Longrightarrow x = 2$

او $3^x = 3 \Longrightarrow x = 1$

مجموعة الحلول = $\{1 , 2\}$.

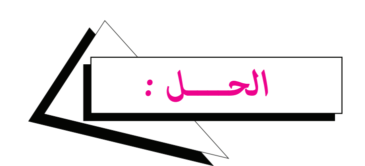


جد قيمة x اذا كان : -

أ) $3^{x-1} = 5^{x-1}$

ب) $(x+3)^5 = {}^5 4$

جـ) $(x - 1)^6 = 2^{\ 6}$



أ) بتطبيق ملاحظة 3

$3^{x-1} = 5^{x-1} \Rightarrow x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$

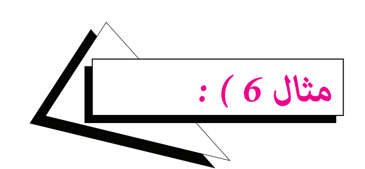
ب) بتطبيق ملاحظة 2

$(x+3)^5 = 4^5 \Rightarrow x+ 3 = 4 \Longrightarrow x = 1$

جـ) بتطبيق ملاحظة 2

$(x-1)^6 = 2^6 \Rightarrow x - 1 = \mp 2 \Longrightarrow x = 3$

$x =-1$



حل المعادلة في R حيث

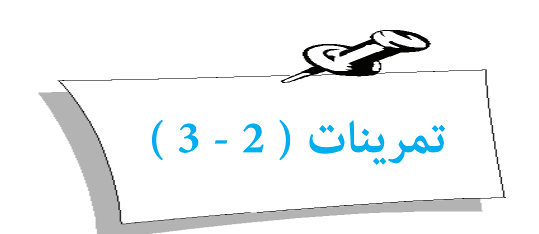
$$8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}+\frac{1}{3}} + 8^{\frac{x}{2}+\frac{2}{3}} = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}} + 8^{\frac{x}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{x}{2}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}}\left(1 + 8^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{2}{3}}\right) = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}}(1+2+4) = 14$$

$$8^{\frac{x}{2}} \times 7 = 14 \Rightarrow 8^{\frac{x}{2}} = 2 \Rightarrow \left(2^3\right)^{\frac{x}{2}} = 2 \Rightarrow 2^{3\frac{x}{2}} = 2^1 \Rightarrow \frac{3x}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$



س1 /

حل كلاً من المعادلات الاتية:

أ) $\sqrt[5]{x^3} = \frac{1}{27}$

ب) $(\sqrt[5]{243})^2 = (x^{-\frac{1}{2}})^2$

جـ) $(x+2)^{\frac{1}{2}} = 3$

د) $10^{(x-4)(x-5)} = 100$

هـ) $-6\times5^x+25^x+5 = 0$

و) $6^{x^2-3x-2} = 36$

ز) $3^{(x^2+5x+4)} = 27^{(-x-4)}$

ح) $2^{2x+3}-57 = 65(2^x-1)$

ط) $5(5^x+5^{-x})=26$

س2 /

حل المعادلة في R حيث $3^{x+1}\times 9^x - 9^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{3}{x}} = 0$

س3 /

حل المعادلة الاتية:

$$\frac{(243)^{x-1}\times(27)^{x-2}}{(729)^{\frac{1}{2}x}} = 81$$

س4 /

جد قيمة $x \in R$ اذا علمت :

أ) $3^{x^2-1}+3^{x^2}+3^{x^2+1} = 39$

ب) $\frac{4^x+4(2^x)+3}{4^x+2^x} = 25$

[3 - 3] الجذور والعمليات عليها

بعض الجذور هي كميات لا يمكن ايجاد قيمها بصورة مضبوطة مثل:

$\sqrt[5]{61}$ ، $\sqrt[3]{10}$ ، $\sqrt{2}$

تدعى هذه الجذور بالجذور الصماء وسنعطي بعض الخواص لتسهيل عملية تبسيطها .

الخــــواص

1. $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$ وعكس الخاصية صحيح .

مثلاً : $\sqrt[5]{6} \times \sqrt[5]{12} = \sqrt[5]{72}$

$\sqrt[4]{5} \quad \sqrt[4]{3} \quad \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{15x^3}$

$\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ وعكس الخاصية صحيح حيث $y \neq 0$.

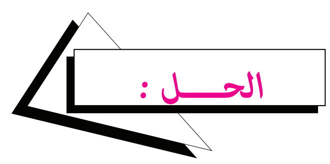
مثلاً : $\sqrt{7} = \sqrt{\dfrac{21}{3}} = \dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$

$\dfrac{\sqrt[3]{3x}}{\sqrt[3]{2y}} = \sqrt[3]{\dfrac{3x}{2y}}$



رتب الجذور الآتية تصاعدياً:

$\sqrt[6]{147}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt[3]{12}$



$\sqrt[3]{12} = \sqrt[6]{12^2} = \sqrt[6]{144}$

$\sqrt{5} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{125}$

$\sqrt[6]{147} = \sqrt[6]{147}$

الترتيب يكون : $\sqrt[6]{147}$ ، $\sqrt[3]{12}$ ، $\sqrt{5}$

[3 - 4] العددان المترافقان $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$ Conjugate Numbers

نعلم ان العامل المنسب هو الذي لو ضربت به الكمية غير النسبية لتحولت الى كمية نسبية .

فالعامل المنسب للمقدار $2\sqrt{3}$ هو $\sqrt{3}$ لأن $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 2 \times 3 = 6$

والعامل المنسب للمقدار $\sqrt[3]{3}$ هو $\sqrt[3]{3^2}$ لأن $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

والعامل المنسب للمقدار $5 + \sqrt{6}$ هو مرافقه $5 - \sqrt{6}$

لان ضربهما $(5 - \sqrt{6})(5 + \sqrt{6}) = 25 - 6 = 19$

والعامل المنسب للمقدار $3\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$ هو $3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

لان $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}) = 9 \times 2 - 4 \times 5 = -2$

والعامل المنسب للمقدار $\sqrt[3]{5} - 1$ هو $\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{5} + 1$

لان $(\sqrt[3]{5} - 1)(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1) = \sqrt[3]{125} - 1 = 5 - 1 = 4$ (فرق بين مكعبين)



بسط بحيث يكون المقام كمية نسبية:

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$



$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} + \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3}$$

$$= \sqrt{2} + 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 2 - \sqrt{3} = 3$$

درسنا سابقا التطبيق وعرفنا انه يتكون من: مجال، مجال مقابل وقاعدة اقتران. والان سنوضح مفهوم الدالة التي هي تطبيق ايضاً مجالها ومجالها المقابل مجموعة جزئية غير خالية من R. تكتب بشكل:

$f: A \to B$ يعني $\forall x \in A$ ، $\exists y \in B$ (y عنصر وحيد) حيث ان $y = f(x)$ ، $A,B \subseteq R$

[3 - 5 - 1] ايجاد اوسع مجال للدوال الحقيقية

سندرس هنا اربعة انواع من الدوال هي: الدالة كثيرة الحدود، الدالة الكسرية، الدالة الجذرية، الدالة الاسية حيث المجال يختلف من دالة الى اخرى

* الدالة كثيرة الحدود وتكتب بالشكل: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$

$a_n, a_{n-1}, \dots a_0 \in R$

وتشمل الدالة الخطية مثل: $f(x) = 3x - 1$ ، الدالة التربيعية مثل: $g(x) = x^2 - 5x + 9$ ، والدالة التكعيبية مثل: $h(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$

اوسع مجال للدوال كثيرة الحدود يساوي R

مثلاً: $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$, $g(x) = x^2 - 5x + 9$, $f(x) = 3x - 1$ اوسع مجال لها يساوي R.

* الدالة الكسرية: لايجاد مجال هذا النوع من الدوال نجعل المقام = صفراً ونجد قيم x

فيكون اوسع مجال للدالة {قيم R\{x . مثلاً:

1) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+5}$ نجعل $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$ اوسع مجال للدالة $R \backslash \{-5\}$

2) $g(x) = \dfrac{2}{x^2 - 4}$ نجعل $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \mp 2$ اوسع مجال للدالة $R \backslash \{\mp 2\}$

3) $h(x) = \dfrac{x + 7}{x^2 - 3x}$ نجعل $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$

اوسع مجال للدالة $R \backslash \{0, 3\}$

* الدالة الجذرية (دليل الجذر زوجي): لايجاد مجال الدالة نجد جميع قيم x الحقيقية التي تجعل داخل الجذر اكبر او يساوي صفراً مثلاً:

1) $f(x) = \sqrt{x-7}$, $x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7$ اوسع مجال للدالة $\{x \in R : x \geq 7\}$

2) $g(x) = \sqrt{3x+5}$, $3x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{-5}{3}$ اوسع مجال للدالة $\{x \in R : x \geq \dfrac{-5}{3}\}$

3) $h(x) = \sqrt{1-2x}$, $1 - 2x \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -1 \Rightarrow x \leq \dfrac{1}{2}$ اوسع مجال للدالة $\{x \in R : x \leq \dfrac{1}{2}\}$

* الدالة الاسية $f_a(x) = a^x$ حيث $a \in R^+ \backslash \{1\}$ ، $x \in R$ حيث a هو الاساس ، x يمثل الاس

من الامثلة على الدالة الاسية: $f_2(x) = 2^x$, $g_3(x) = 3^x$, $h_{\sqrt{5}}(x) = (\sqrt{5})^x$, $f_{\frac{1}{2}}(x) = (\frac{1}{2})^x$

ملاحظة: $f(x) = 1^x = 1$ وهذه دالة ثابتة وهذا ما جعلنا نستبعد a=1 في الدالة الاسية

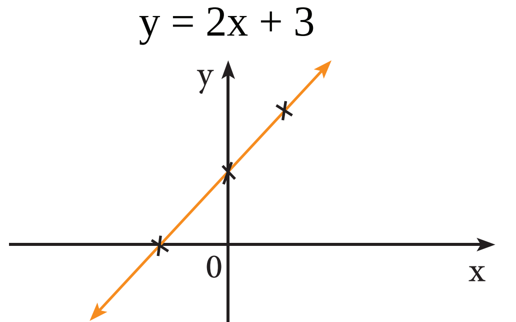
[2 - 5 - 3] التمثيل البياني للدوال الحقيقية

اولاً: تمثيل الدالة الخطية $f(x) = ax + b$ حيث $a \neq 0 , a,b \in R$

مثال: مثل الدالة $f(x) = 2x + 3 , \forall x \in R$

x	1	0	–1
y	5	3	1

لاحظ ان هذه الدالة تمثل خط مستقيم



ثانياً: تمثيل الدالة التربيعية $a,b \in R, a \neq 0 , f(x) = ax^2 + b$

مثال: مثل الدالة $f(x) = 2x^2 + 3$ اي عندما $a > 0, b \geq 0$

x	–1	0	1
y	5	3	5

لاحظ ان شكل لدالة هو $\cup$

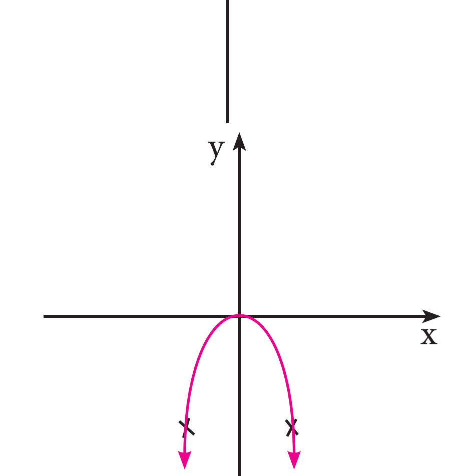
وتمثيلها البياني يقع في النصف الاعلى من المستوي الاحداثي

مثال: مثل الدالة $f(x) = -4x^2$، اي عندما $a < 0$

x	1	0	–1
y	–4	0	–4

لاحظ ان شكل الدالة هو $\cap$

وتمثيلها البياني يقع في النصف الاسفل من المستوي الاحداثي



ثالثاً: تمثيل الدالة التكعيبية

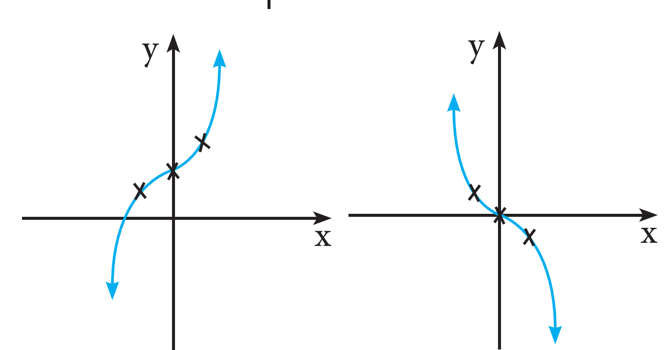
$a,b \in R , a \neq 0, f(x) = ax^3 + b$

مثال: مثل الدالة: $f(x) = x^3 + 2$

x	1	0	–1
y	3	2	1

مثال: مثل الدالة $f(x) = -x^3$

x	1	0	–1
y	–1	0	1



$f(x) = x^3 + 2$ $\qquad$ $f(x) = -x^3$

رابعاً: تمثيل الدالة الاسية $f_a(x)=a^x$

مثال:

أ) جد قيم الدالة $f(x) = 2^x$ من اجل 3-، 2-، 1-، 0، 1، 2، 3 = x ثم استفد من ذلك في رسم جزء من منحني هذه الدالة.

ب) ابحث عن طريقة للافادة من المنحني السابق في رسم جزء من منحني هذه الدالة: $f_{\frac{1}{2}}(x)$ على الشكل نفسه.

الحل:

أ) $f(x) = 2^x$

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
2^x	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

ب) $g(x) = f_{\frac{1}{2}}(x) = (\frac{1}{2})^x = (2^{-1})^x = 2^{-x} = f(-x)$ ولنفرض R_Y تناظر بالنسبة لمحور الصادات $R_y: (x, y) = (-x, y)$ اي ان صورة $(x, 2^x) = (-x, 2^x)$ لذلك فاننا نحصل على منحني لدالة $g(x)=(\frac{1}{2})^x$ من المنحني $f(x) = 2^x$ بالتناظر حول محور الصادات كما موضح في الشكل (3 - 1)

الشكل (3 - 1)

بعض خصائص الدالة الأسية $f(x) = a^x$:

1. اذا قمنا برسم منحنيات الدوال :

2^x ، 3^x ، 4^x ، 5^x ، ......

وكذلك الدوال : $(\frac{1}{2})^x$، $(\frac{1}{3})^x$، $(\frac{1}{4})^x$، $(\frac{1}{5})^x$،.......

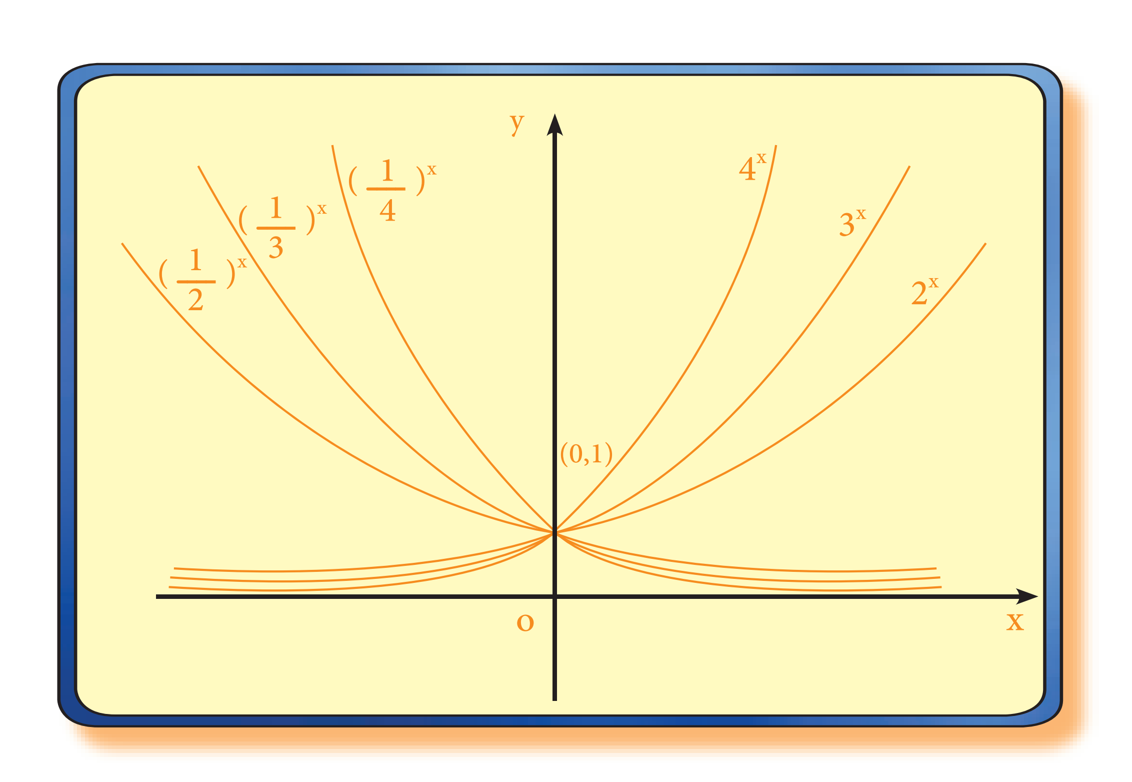
فسوف نجد مجموعتين من المنحنيات:

الاولى : عندما $1 < a$ حيث تتزايد قيم الدالة a^x كلما تزايدت قيمة x .

الثانية : عندما $0 < a < 1$ حيث تتناقص قيم الدالة a^x كلما تزايدت قيمة x .

وقد رسمنا في الشكل (2 - 3) ستة من هذه المنحنيات (رسم جزء من كل منحني) ثلاثة فيها $a > 1$ وثلاثة منها اخرى فيها $0 < a < 1$ وقد اخترنا قيم a في هذه الاخيرة مقلوبات قيم a في الثلاثة الاولى ونلاحظ ان جميع هذه المنحنيات تمر بالنقطة (0 , 1)

2. بالرجوع الى المنحني البياني لأية دالة اسية a^x ، $a \neq 0$ نجد ان مجالها R .



الشكل (2 - 3)



تمرينات (3-3)

س1 /

أ) اختصـــــر $\left[\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} - \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\right]^{-1} \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$

ب) اذا كان $y = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$, $x = \sqrt[3]{2} + 1$ فاثبت ان $xy = 3$

س2:/ مثل بيانياً الدوال التالية:

a) $f(x) = -4x^2 + 5$ b) $f(x) = x - 8$ c) $f(x) = 2 - x^3$

س3 / جد اوسع مجال للدوال التالية:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 9$ b) $f(x) = \frac{x-1}{x+9}$ c) $f(x) = \sqrt{x-9}$

d) $f(x) = \sqrt{3-5x}$ e) $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$

س4/ اوجد ناتج مايلي بحيث يكون المقام كمية نسبية:

أ) $\frac{3}{a-b} \cdot \sqrt{\frac{2x}{a-b}} \div \sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}}$ Ans : $\frac{a-b}{x}$

ب) $\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{8}{27}}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$ Ans : $\frac{5}{24}$

جـ) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$ Ans : 1

س5 / أ) اثبت ان

$$\frac{-15}{x-6+\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} - \frac{3}{\sqrt{x}+3} = 0$$

ب) جد x بصورة $a + \sqrt{3}b$ اذا كانت : $x + \sqrt{3}x = 8$

س6 / ارسم جزءاً من المنحني البياني للدالة: $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

الفصل الرابع : حساب المثلثات

4

[4-1] الزاوية الموجهة بالوضع القياسي
[4-2] القياس الستيني والقياس الدائري للزوايا
[4-3] العلاقة بين القياس الستيني والدائري للزوايا
[4-4] النسبة المثلثية لزوايا حادة وبعض العلاقات الاساسية
[4-5] النسب المثلثية لزاوية خاصة
[4-6] دائرة الوحدة والنقطة المثلثية
[4-7] التطبيقات الدائرية
[4-8] استخدام الحاسوب في ايجاد قيم التطبيقات الدائرية
[4-9] حل المثلث القائم الزاوية

الاهداف السلوكية

ينبغي بعد دراسة هذا الفصل يكون الطالب قادراً على ان:

- يتعرف على الزاوية الموجهة
- يتعرف على النظام الستيني والنظام الدائري
- يميز بين النظامين
- يتعرف على النسب المثلثية
- يتعرف على بعض العلاقات الاساسية
- يتعرف على النسب المثلثية للزوايا الخاصة
- يحل مسائل تعتمد على النسب المثلثية
- يتعرف على دائرة الوحدة
- يتعرف على النقطة المثلثية
- يستخدم الحاسوب في بعض العمليات الرياضية
- يحل المثلث القائم الزاوية

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
* الزاوية الموجهة	$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$
* التقدير الستيني والدائري	D° ، Q
* جيب الزاوية x	Sin x
* جيب تمام الزاوية x	Cos x
* ظل الزاوية x	Tan x
* النقطة المثلثية	(Cos x , Sin x)

الفصل الرابع : حساب المثلث Trigonometry :

مقدمة : ان للمسلمين الفضل الكبير في تعديل وجمع ما تشتت من علم المثلثات من كتب الاغريق . فكان للبابليين والمصريين والهنود والصينين واليونانين اشارات واضحة في هذا العلم.
ومن العلماء المسلمين الذين اسهموا في هذا المجال :

* البيروني (440 - 362هـ) = (1048 - 973م) : هو ابو الريحان محمد بن احمد الفلكي عربي من اصل فارسي ولد في كاث بخوارزم وتوفي في غزنة بافغانستان وله نظرية لاستخراج محيط الارض في كتابه الاسطرلاب وتسمى قانون البيروني وتنص على ان: $r = \frac{b \, Cos \, x}{a - Cos \, x}$ حيث

r: نصف قطر الارض ، a : ارتفاع قمة جبل ، b : الارتفاع المرصود ، x : زاوية الانحدار عن الافق

* البوزجاني : (388 - 328هـ) = (988 - 940م) : هو محمد بن محمد يحيى بن اسماعيل بن العباس أبو الوفاء ، ولد في مدينة بوزجان وفي عام 959 م أنتقل الى بغداد . وهو اول من وضع النسبة المثلثية واستعمالها في حل المسائل الرياضية ووضع المعادلات الاتية :

$$Sin \, x = 2Sin \frac{x}{2} \, Cos \frac{x}{2} \quad ، \quad 2Sin^2 \frac{x}{2} = 1 - Cos \, x$$

$$Sin(x+y) = \sqrt{Sin^2x - Sin^2x \, Siny} + \sqrt{Sin^2y - Sin^2y \, Sin^2x}$$

$$Tanx = \frac{Sin \, x}{Cos \, x} \quad ، \quad Cotx = \frac{Cos \, x}{Sin \, x}$$

$$Secx = \sqrt{1 + Tan^2x} \quad ، \quad cecx = \sqrt{1 + Cot^2x}$$

* الكاشي (899 هـ) = (1492م) هو غياث الدين جمشيد بن مسعود بن محمود بن الكاشي ولد في مدينة كاشان بايران وتوفى في سمرقند ، يعتبر عالم رياضي ممتاز حيث تنسب اليه النسبة التقريبية « π » التي وردت في كتابه (الرسالة المحيطة) حيث اعطى 2π صحيحة لخمسة عشر رقماً عشرياً ، $2\pi = 6.28318571795865$

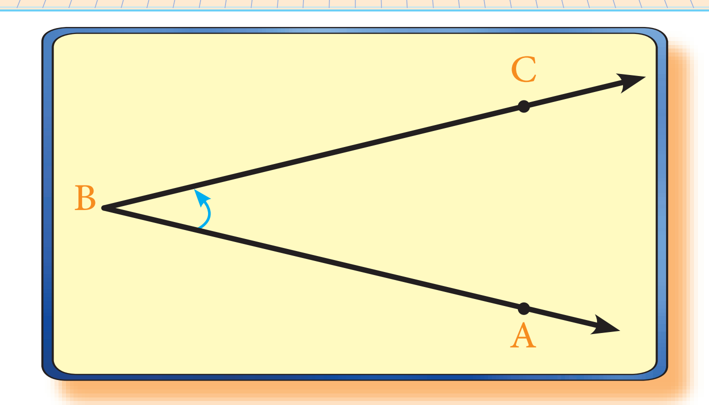
ومن مؤلفاته «مفتاح الحساب» والذي حوى على : الحساب ، الهندسة ، المساحات ، الجيب والوتر، استخراج جيب الدرجة الاولى وغيرها ....)

وقد تطور علم المثلثات في القرن السابع عشر على يد العالم الاسكتلندي جون نابير (1617 - 1550 م) ولعلم المثلثات استخدامات كثيرة في الملاحة والمساحة والجغرافية والفيزياء وكثير من فروع الهندسة وفي هذا الفصل سنعطي المبادئ الاساسية لموضوع المثلثات .

[4 - 1] الزاوية الموجهة بالوضع القياسي :

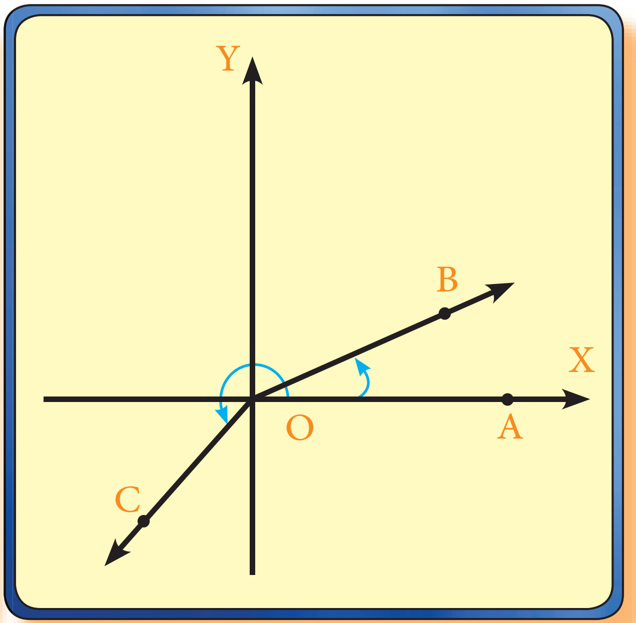
تعريف (4 - 1)

الزاوية الموجهة Directed Angle : اذا كان للشعاعين $\overrightarrow{BA}$ ، $\overrightarrow{BC}$ نقطة بداية مشتركة هي B فان الزوج المرتب $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ يسمى الزاوية الموجهة التي ضلعها الابتدائي $\overrightarrow{BA}$ وضلعها النهائي $\overrightarrow{BC}$ ورأسها النقطة B وتكتب باحدى الطريقتين $(\overrightarrow{BA}، \overrightarrow{BC})$ أو $<\overrightarrow{ABC}$.

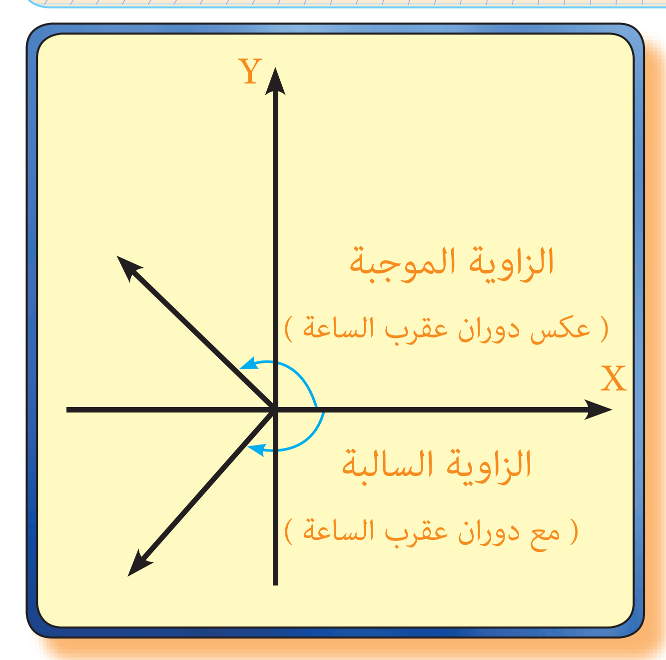


تعريف (4 - 2)

الزاوية الموجهة بالوضع القياسي : اذا كان لدينا نظام احداثي متعامد المحورين في المستوي وزاوية موجهة في المستوي فيقال ان الزاوية الموجهة في وضع قياسي اذا وقع رأسها في نقطة الأصل وانطبق ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب لمحور السينات كما في الشكل (4 - 1) .



الشكل (4 - 1)



الشكل (4 - 2)

[2 - 4] القياس الستيني والقياس الدائري للزوايا :

القياس الستيني Degree Measure : تعلمنا من المرحلة المتوسطة انه:

اذا قسمنا دائرة على 360 قسماً متساوياً فاننا نحصل على 360 قوساً متساوية كل قوس منها يقابل زاوية مركزية في هذه الدائرة قياسها يسمى درجة في التقدير الستيني ويرمز له بالرمز 1°

كما ان : $1^\circ = 60$ دقيقة $= 60'$ ، $1' = 60$ ثانية $= 360''$

القياس الدائري Radian Measure : يوجد نظام اخر لقياس الزوايا يسمى القياس الدائري للزوايا.

تعريف (3 - 4)

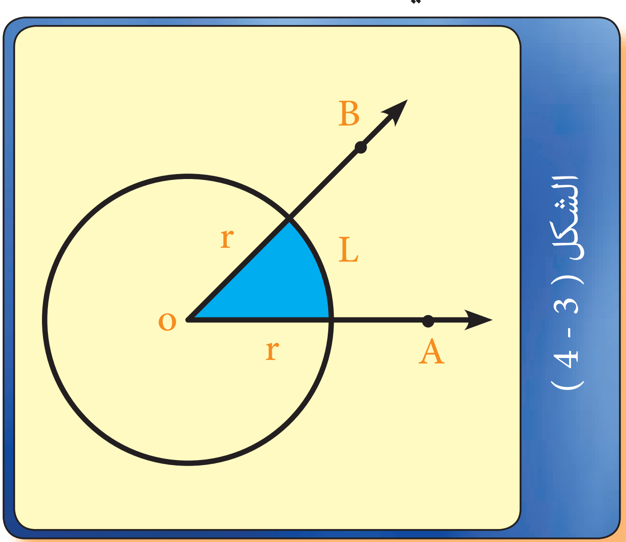
وحدة قياس الزوايا بالتقدير الدائري هي الزاوية نصف القطرية وهي قياس للزاوية التي وضع رأسها في مركز دائرة وقابلها قوس Arc طوله مساوٍ لنصف قطر تلك الدائرة .

ففي الشكل (3 - 4) اذا فرضنا ان طول القوس المقابل للزاوية المركزية A O B يساوي (L) وحدة طول نصف قطر الدائرة $= r$ وحدة طول وكان $L = r$ فان $m \angle AOB$

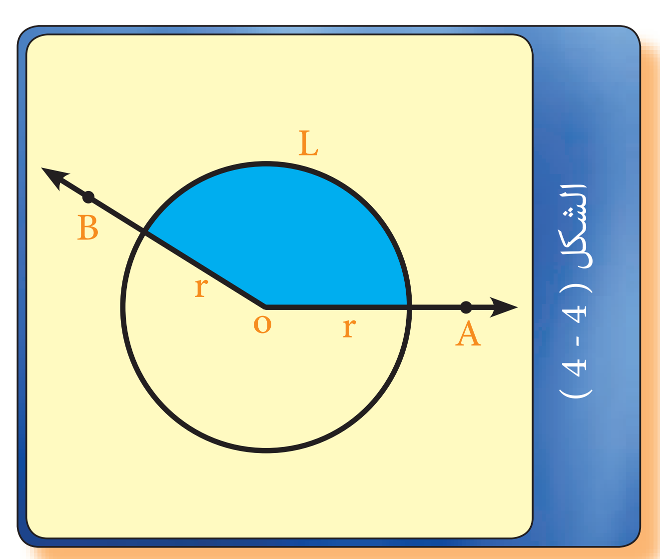
بالتقدير الدائري = 1 زاوية نصف قطرية .

واذا كان $L = 2r$ كما في الشكل (4 - 4) فان $m \angle AOB$

بالتقدير الدائري = 2 من الزوايا نصف القطرية .



الشكل (3 - 4)



الشكل (4 - 4)

ومن تعريف (3 - 4) ينتج ان طول قوس الدائرة التي نصف قطرها r هو :

$L = |Q| \cdot r$ حيث | Q | قياس الزاوية المركزية المقابلة لذلك القوس مقدراً بالتقدير الدائري.

أو $|Q| = \frac{L}{r} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نصف القطر}}$

[3 - 4] العلاقة بين القياس الستيني والدائري للزوايا :

تعلمنا سابقاً ان محيط الدائرة = $2\pi r$

وبما ان $|Q| = \frac{L}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

وبما ان 2π زاوية نصف قطرية = 360°

$\therefore$ π زاوية نصف قطرية = 180°

$\Leftarrow$ 1 زاوية نصف قطرية = $\frac{180^\circ}{\pi}$

$\Leftarrow$ $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$ زاوية نصف قطرية .

بصورة عامة : أ) اذا كان قياس زاوية موجهة = Q زاوية نصف قطرية

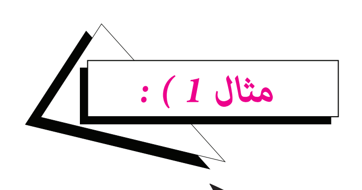
فإن Q زاوية نصف قطرية = $\frac{D^\circ \times \pi}{180^\circ}$

ب) اذا كان قياس زاوية موجهة = D° فإن :

$D^\circ = (\frac{180^\circ}{\pi} \times Q)$ زاوية نصف قطرية :

ومنه نستنتج ان : $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$

وتستخدم هذه العلاقة لتحويل قياس الزاوية من التقدير الدائري الى الستيني وبالعكس .



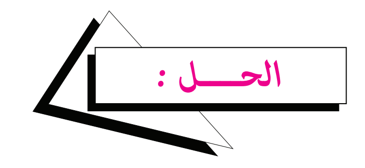
اذا كانت $\overrightarrow{AOB} >$ في وضع قياسي تقابل قوساً طوله 10cm في دائرة طول نصف قطرها 12cm .

أ) احسب بالتقدير الدائري $m < \overrightarrow{AOB}$ حيث :

$0 \leq m < AOB \leq 2\pi$ علماً ان مركز الدائرة هو نقطة الاصل.

ب) احسب بالتقدير الدائري $m < \overrightarrow{AOB}$ حيث :

$-2\pi < m < AOB \leq 0$



$L = 10\ cm$ ، $r = 12\ cm$

أ) ∴ زاوية نصف قطرية $|Q| = \frac{L}{r} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0.833$

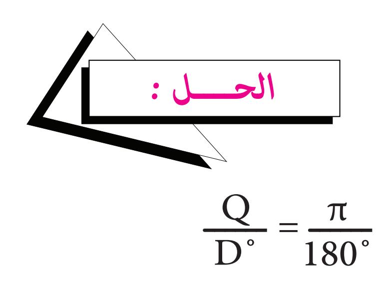
ب) في هذه الحالة يكون قياس الزاوية سالباً ويكون :

$$|Q| = \frac{L}{r} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} = 0.833$$

∴ $Q = -0.833$ زاوية نصف قطرية (لان الزاوية سالبة).



اذا كانت $\overrightarrow{AOB} >$ في وضعها القياسي وكان قياسها $\frac{3\pi}{4}$ فما قياسها بالتقدير الستيني ؟



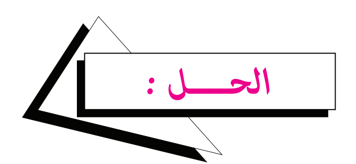
$$\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\frac{\frac{3\pi}{4}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Rightarrow D^\circ = 180^\circ \times \frac{3}{4} = 135^\circ$$



حول : أ) 45° الى التقدير الدائري .

ب) 2.6π الى التقدير الستيني .

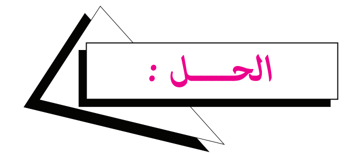


أ) $\because \frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Leftarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{45^\circ} \Leftarrow Q = \frac{\pi}{4}$ من الزوايا النصف قطرية .

ب) $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Leftarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2.6\pi}{D^\circ} \Leftarrow D^\circ = 2.6 \times 180^\circ = 468^\circ$



زاوية مركزية قياسها 60° فما طول القوس الذي تقابله اذا كان طول نصف قطر دائرتها 9cm ؟



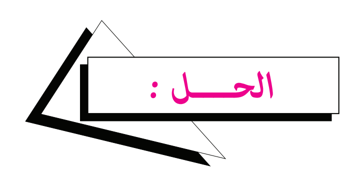
$\because \frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Leftarrow \frac{Q}{60^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Leftarrow Q = \frac{1}{3}\pi$ من الزوايا النصف قطرية .

$\because \left| Q \right| = \frac{L}{r}$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{L}{9} \Longrightarrow L = 3\pi = 3 \times 3.142$$
$$= 9.426 \text{ cm}$$

مثال (5) :

زاوية مركزية طول قوسها $21\frac{1}{4}$ cm وطول نصف قطر دائرتها 20 cm فما مقدار قياسها الستيني؟



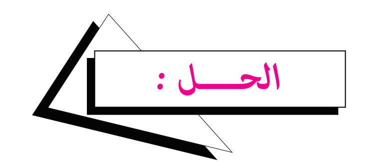
$|Q| = \frac{L}{r} \Leftarrow |Q| = \frac{21\frac{1}{4}}{20} = \frac{17}{16}$ زاوية نصف قطرية .

ثم $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Leftarrow \frac{\frac{17}{16}}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}$

$D^\circ = \frac{17}{16} \times 180^\circ \times \frac{7}{22} = 60.85^\circ$



في مثلث قائم الزاوية الفرق بين زاويتيه الحادتين 0.44 زاوية نصف قطرية فما قياس كل منها بالتقدير الستيني ؟



$\because \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \Leftarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{0.44}{D^\circ}$

$\therefore D^\circ = \frac{0.44 \times 180}{\pi} = \frac{0.44 \times 180}{3.14} = 25.2^\circ$

نفرض ان الزاويتين الحادتين قياسهما الستيني A ، B

$A + B = 90^\circ$ 1

$A - B = 25.2^\circ$ 2

بالجمع

$2A = 115.2$

$\therefore A = 57.6^\circ$

$B = 32.4^\circ$

الخلاصة

العلاقة بين النظام الستيني D^0 والنظام النصف قطري Q هي : $\frac{Q}{D^0} = \frac{\pi}{180^0}$

العلاقة بين الزاوية المركزية Q وطول القوس L ونصف قطر دائرتهم r هي: $|Q| = \frac{L}{r}$



تمرينات (1 - 4)

س1 /

حول الى التقدير الدائري كل من قياس الزوايا الاتية :

300° ، 120° ، 30°

س2 /

حول كلاً من الزوايا نصف القطرية الآتية الى التقدير الستيني :

$\frac{1}{3}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{3\pi}{5}$

س3 /

قياس زاوية مركزية في دائرة $\frac{5}{6}$ من الزوايا نصف القطرية تقابل قوساً طوله 25cm جد نصف قطر تلك الدائرة .

ج / 30 cm

س4 /

ماطول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها 135° في دائرة نصف قطرها 8cm ؟

ج /18.857cm

س5 /

زاويتان مجموعهما $\frac{\pi}{4}$ زاوية نصف قطرية وفرقهما يساوي 9° فما مقدار هاتين الزاويتين بالتقدير الستيني ؟

ج / 18° ، 27°

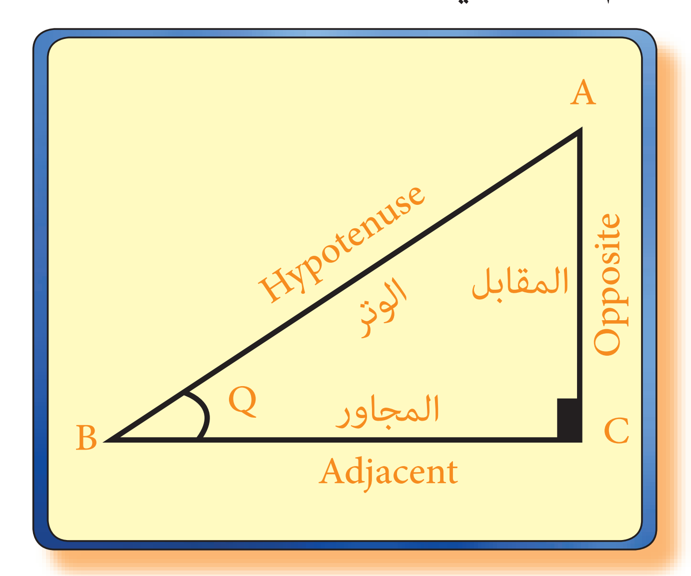
س6 /

ارسم $\angle \overrightarrow{AOB}$ في وضعها القياسي اذا كان قياسها = $\frac{5\pi}{4}$ ثم جد قياسها بالتقدير الستيني ؟

[4 - 4] النسب المثلثية لزاوية حادة وبعض العلاقات الاساسية

الشكل (5 - 4) يمثل المثلث ABC القائم الزاوية في C

وليكن $m \angle ABC = Q$



الشكل (5 - 4)

تعريف (4 - 4)

نسمي العدد الذي يمثل النسبة الاتية كما يلي :

1. النسبة $\frac{AC}{AB}$ تدعى جيب (Sine) الزاوية الحادة (Q)

وتكتب $\text{Sin } Q = \frac{AC}{AB} = \frac{OPP.}{HYP.}$

2. النسبة $\frac{BC}{AB}$ تدعى جيب تمام (Cosine) الزاوية الحادة (Q)

وتكتب $\text{Cos } Q = \frac{BC}{AB} = \frac{ADJ.}{HYP.}$

3. اما النسبة $\frac{AC}{BC}$ فتدعى ظل (Tangent) الزاوية الحادة (Q)

وتكتب $\tan Q = \frac{AC}{BC} = \frac{OPP.}{ADJ.}$

من الشكل (5 - 4): $(AC)^2+(BC)^2 = (AB)^2$ (مبرهنة فيثاغورس)

وبقسمة طرفي المعادلة على $(AB)^2$ ينتج :

$$\left(\frac{AC}{AB}\right)^2+\left(\frac{BC}{AB}\right)^2=\left(\frac{AB}{AB}\right)^2$$

ومن تعريف (4 - 4)

نحصل على : $Sin^2\, Q + Cos^2\, Q = 1$

من تعريف (4-4) آيضاً :

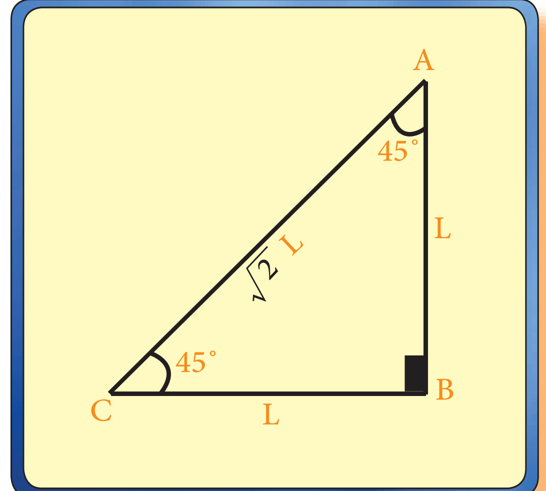
$\tan Q = \frac{AC}{BC}$ وبقسمة طرفي النسبة على (AB) نحصل على :

$$\tan Q = \frac{\frac{AC}{AB}}{\frac{BC}{AB}}$$

$$\therefore \tan Q = \frac{Sin\, Q}{Cos\, Q}$$

1) زاوية قياسها ° 45

نرسم المثلث ABC القائم الزاوية في B . واحدى زواياه قياسها (°45) فتكون الاخرى (°45) ايضاً



$\therefore AB = BC = L$

فيثاغورس: $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$(AC)^2 = L^2 + L^2 = 2L^2$

$\therefore AC = \sqrt{2}\,L$

$\sin 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2}L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\cos 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2}L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\tan 45^\circ = \frac{L}{L} = 1 \Rightarrow \boxed{\tan 45^\circ = 1}$

2) زاوية قياسها ° 30، ° 60

نرسم مثلثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه = 2L

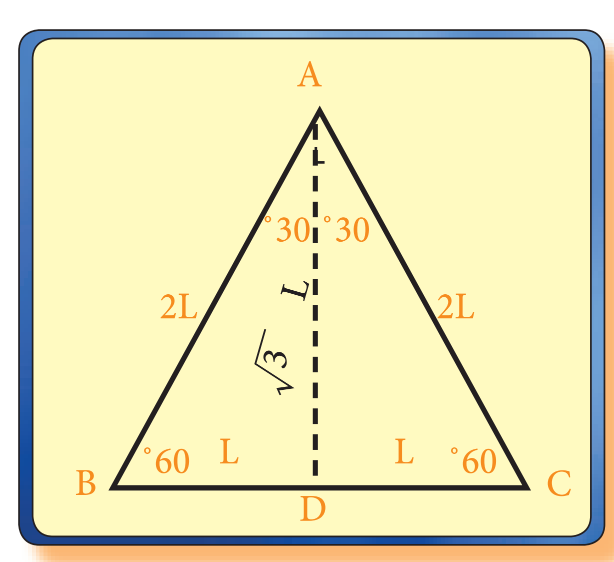
فيكون قياسات زواياه متساوية وكل منها = °60

نرسم $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ لاحظ الشكل المجاور

$\therefore CD = DB = L$ وحدة

وان $m \measuredangle BAD = 30^\circ$

باستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد ان $AD = \sqrt{3}\,L$



$\sin 30^\circ = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}}$

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}L}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}L}{2L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{L}{2L} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\cos 60^\circ = \frac{1}{2}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{L}{\sqrt{3}L} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}L}{L} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\tan 60^\circ = \sqrt{3}}$$

لاحظ ان : $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

كذلك $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

اي ان جيب احدهما يساوي جيب تمام الاخرى وبالعكس.

وبصورة عامة اذا كانت Q زاوية حادة فان قياس متممتها

هو $(90^\circ - Q)$ ويكون :

$$\sin(90^\circ - Q) = \cos Q$$
$$\cos(90^\circ - Q) = \sin Q$$

ملاحظة :

الزاويتان : 30° , 60° متتامتان

لأن

$$60^\circ + 30^0 = 90^\circ$$

الخلاصة

* $\sin Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$, $\cos Q = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$, $\tan Q = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
* $\sin^2 Q + \cos^2 Q = 1$, $\tan Q = \frac{\sin Q}{\cos Q}$
* $\sin(90^\circ - Q) = \cos Q$, $\cos(90^\circ - Q) = \sin Q$
* $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
* $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

[6 - 4] دائرة الوحدة والنقطة المثلثية :

تعريف (4 - 5)

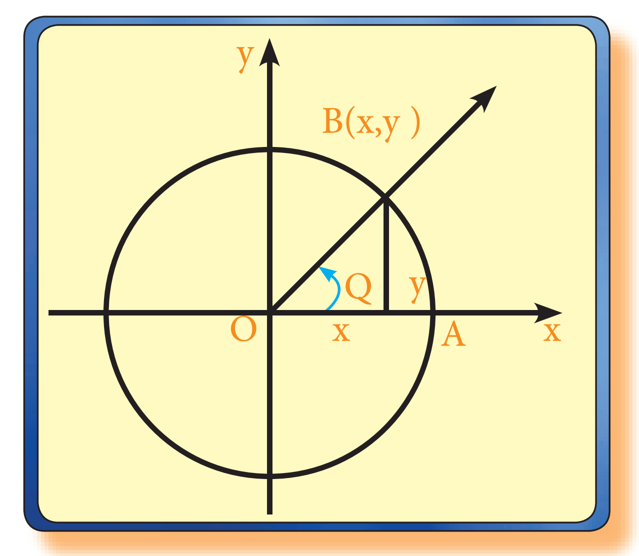
دائرة الوحدة : هي دائرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها يساوي وحدة طول واحدة .

النقطة المثلثية لزاوية في الشكل $m\measuredangle \overrightarrow{BO}A = Q$ ،
زاوية موجهة في الوضع القياسي ، B نقطة تقاطع الضلع
النهائي $\overrightarrow{OB}$ مع دائرة الوحدة نفرض ان B(x,y)

$$\sin Q = \frac{y}{1} \Rightarrow \sin Q = Y$$

$$\cos Q = \frac{x}{1} \Rightarrow \cos Q = X$$

$$\therefore B(x,y) = (\cos Q, \sin Q)$$



ملاحظة :
باستخدام دائرة الوحدة والانعكاس على المستوي يمكن إيجاد النسب المثلثية الآتية :

$$\sin(180^\circ - Q) = \sin Q$$

$$\cos(180^\circ - Q) = -\cos Q$$

$$\tan(180^\circ - Q) = -\tan Q$$

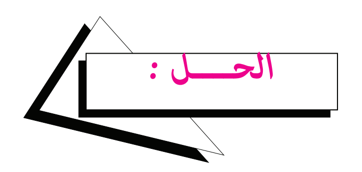
تعريف (4 - 6)

النقطة المثلثية Trigonometric Point للزاوية الموجهة في الوضع القياسي هي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزواية مع دائرة الوحدة .

لاحظ أن نقطة B هي نقطة مثلثية للزاوية $\overrightarrow{AOB}$ مما سبق يتضح أن لكل زاوية موجهة Q في الوضع القياسي نقطة مثلثية (x , y) يكون $y = \sin Q$ ، $x = \cos Q$.



جد $\tan Q$ ، $\cos Q$ ، $\sin Q$ إذا علمت أن $Q = 0^\circ ، 90^\circ ، 180^\circ$



نعلم ان 0° ، 90° ، 180° يقع الضلع النهائي لكل منها على أحد المحورين الاحداثيين . وكما في الشكل (6 - 4) فان :

$(\cos 0 , \sin 0) = (1 , 0) \Longrightarrow \cos 0^\circ = 1$

$\sin 0^\circ = 0$

$\therefore \tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0 \Longrightarrow \tan 0^\circ = 0$

* $(\cos 90^\circ , \sin 90^\circ) = (0,1)$

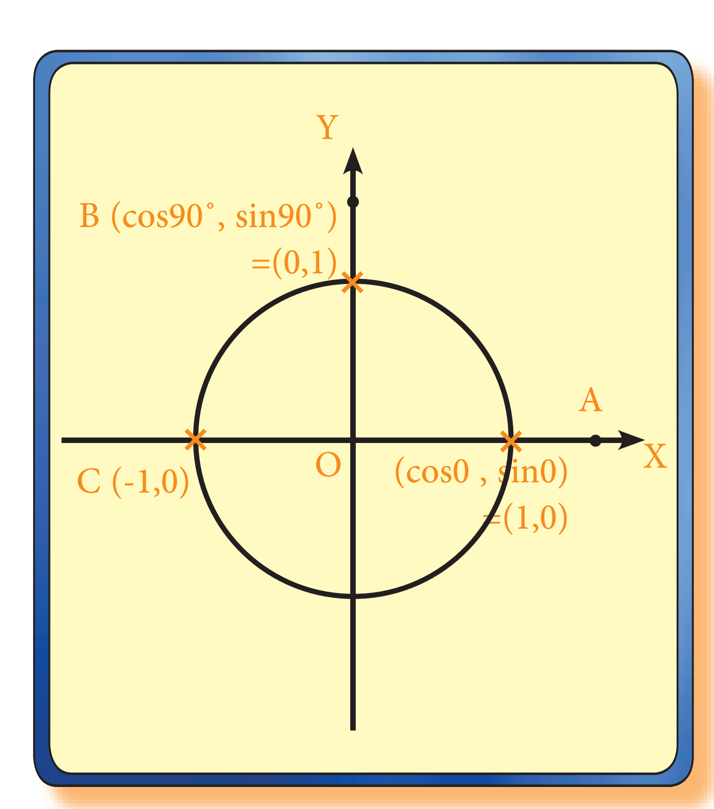
$\Longrightarrow \cos 90^\circ = 0$ ، $\sin 90^\circ = 1$

لكن $\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ}$ غير معرف

* $(\cos 180^\circ , \sin 180^\circ) = (-1, 0)$

$\Longrightarrow \cos 180^\circ = -1$ ، $\sin 180^\circ = 0$

$\Longrightarrow \tan 180^\circ = 0$



الشكل (6 - 4)

[4 - 7] التطبيقات الدائرية :

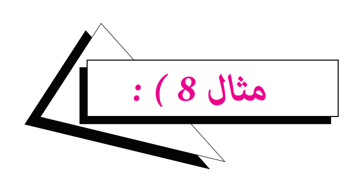
[4-7-1] زاويتا الارتفاع والانخفاض:

نتمكن من حساب الارتفاعات والابعاد عندما نتمكن من قياس الزوايا التي نراها بها. فإذا وقف راصد في نقطة A ونظر الى نقطة C تقع فوق افق A فإن الزاوية الحاصلة بين المستقيم الواصل من عين الراصد الى نقطة C وبين أفق A تدعى ، (زاوية إرتفاع C Angle of Elevation بالنسبة الى A) مثلاً الزاوية $\measuredangle CAB$ في الشكل (7 - 4).

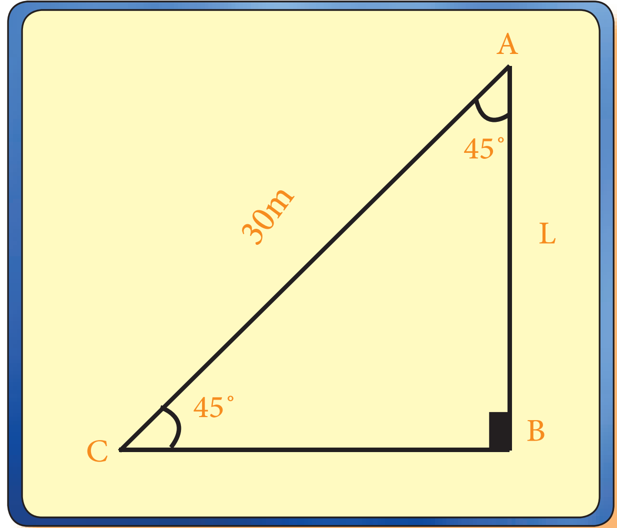
أما إذا كانت عين الراصد في C ونظر الى A التي تحت أفق C ، فإن الزاوية الكائنة ، بين المستقيم الواصل من عين الراصد إلى النقطة A وبين أفق C تدعى (زاوية إنخفاض A Angle of Depression بالنسبة الى C) مثلاً الزاوية $\measuredangle ACD$ في الشكل (7 - 4) .

D C
زاوية انخفاض A
مقاسه من C
زاوية ارتفاع Cمقاسه من A
A B

الشكل (7 - 4)



طائرة ورقية طول خيطها 30m فإذا كانت الزاوية التي يصنعها الخيط مع الأرض(مع الافق) هي °45 جد إرتفاع الطائرة الورقية عن الارض .



الشكل (8 - 4)

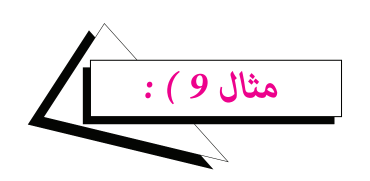
الحــل :

نفرض أن الارتفاع = L من وحدات الطول

المثلث A B C قائم الزاوية في B .

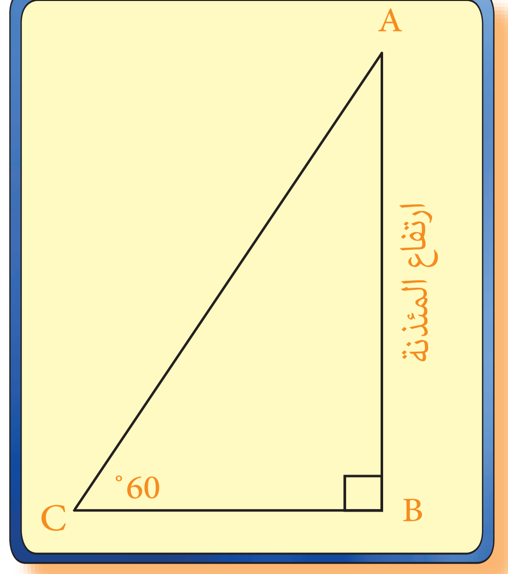
$$\sin 45^\circ = \frac{OPP.}{Hyp.} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{L}{30} \therefore$$

$$\therefore L = \frac{30}{\sqrt{2}} = 21.21m$$

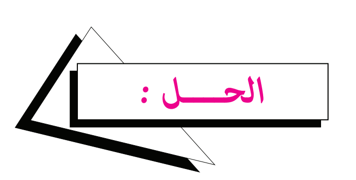


مثال 9) :

وجد راصد أن زاوية إرتفاع قمة مئذنة من نقطة على الأرض تبعد 8m عن قاعدتها تساوي 60° فما إرتفاع المئذنة ؟



الشكل (9 - 4)



الحـــل :

Δ A B C قائم الزاوية في B :

$$\tan 60^\circ = \frac{OPP.}{ADJ.}$$

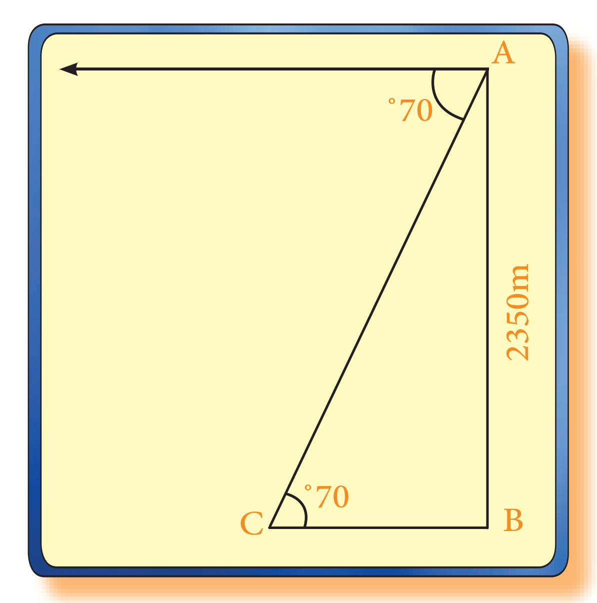
$$\sqrt{3} = \frac{AB}{8}$$

$\therefore$ $AB = 8\sqrt{3}$ متر إرتفاع المئذنة.

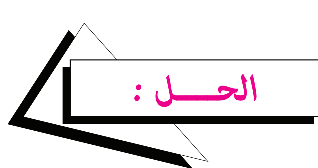


مثال 10) :

جبل إرتفاعه 2350m وجد راصد من قمته أن قياس زاوية انخفاض نقطة على الارض 70° فما هي المسافة بين النقطة والراصد ؟ علماً أن $\sin 70^0 = 0.9396$.



الشكل (10 - 4)



الحـــل :

قياس زاوية الارتفاع = قياس زاوية الانخفاض

Δ ABC قائم الزاوية في B

$$\sin 70^\circ = \frac{AB}{AC}$$

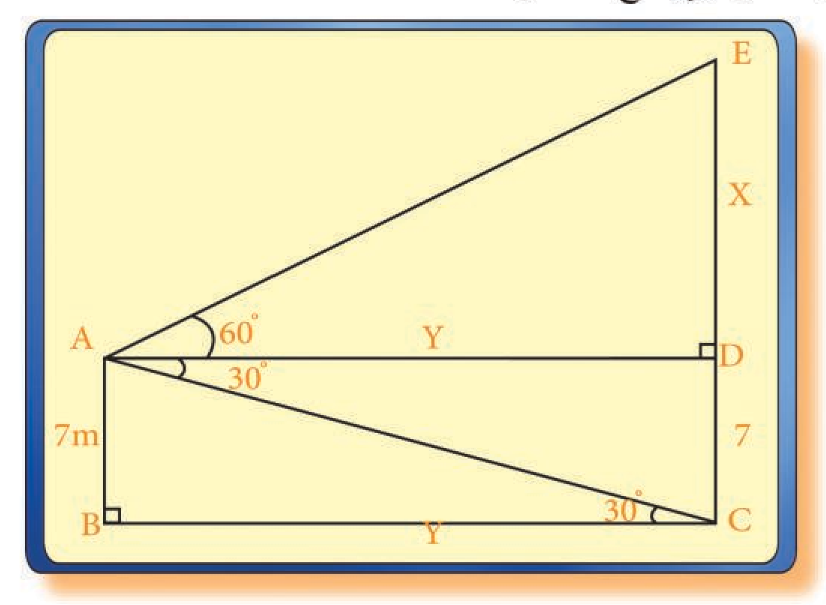
$$0.9396 = \frac{2350}{AC}$$

$$\therefore AC = \frac{2350}{0.9396} \cong 2500m$$



مثال 11) :

من سطح منزل إرتفاعه 7 متر وجد راصد أن زاوية إرتفاع أعلى عمارة أمامه 60° وزاوية إنخفاض قاعدتها 30°، جد البعد بين الراصد والعمارة وإرتفاع العمارة.



الشكل (11 - 4)

الحــــل :

$\measuredangle DAC = \measuredangle ACB$

[زاوية الانخفاض = زاوية الارتفاع]

في ΔABC القائم في B :

$\tan 30^\circ = \frac{7}{Y}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{7}{Y} \Rightarrow Y = 7\sqrt{3}$ البعد بين الراصد والعمارة.

في ΔEAD القائم في D :

$\tan 60^\circ = \frac{X}{Y}$

$\sqrt{3} = \frac{X}{7\sqrt{3}} \Rightarrow X = 21\ m$

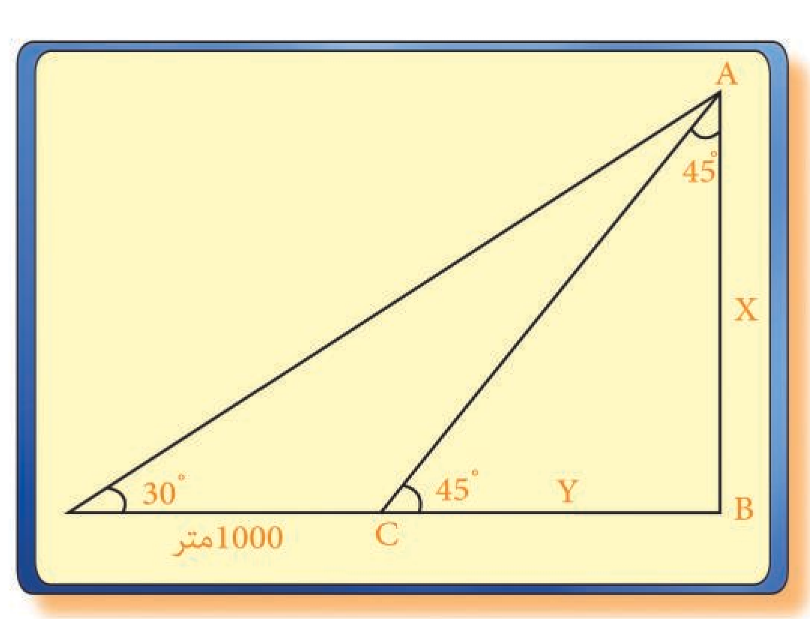
$\therefore$ إرتفاع العمارة = X+ 7

=21+7= 28m



شاهد راصد أن زاوية إرتفاع منطاد مثبت هي ° 30 ولما سار الراصد في مستوى أفقي نحو المنطاد مسافة 1000 متر شاهد أن زاوية الارتفاع هي ° 45 جد إرتفاع المنطاد الى أقرب متر.





الشكل (12 - 4)

Δ ABC قائم الزاوية في B :

$$\tan 45^\circ = \frac{x}{y}$$

$$1 = \frac{x}{y}$$

$$\therefore\ x = y \ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{y + 1000} \ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{y + 1000} \Rightarrow \sqrt{3}\,y = y + 1000$$

$$1.7\,y - y = 1000$$

$$y = \frac{1000}{0.7} = 1428.6$$

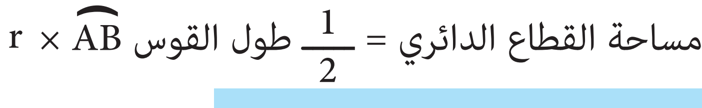
$\therefore$ $x = 1429$ متراً ارتفاع المنطاد .

[4-7-2] القطاع الدائري Circular Sector :

تعريف (7 - 4)

القطاع الدائري هو جزء من سطح دائرة محدد بقوس من الدائرة وبنصفي القطرين المارين بنهايتي القوس.

في الشكل (13-4) تسمى AOB ∢المركزية Central Angle بزاوية القطاع الأصغر وقياسها اقل من °180.



مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ طول القوس $\overset{\frown}{AB} \times r$

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2} L\, r$ ..... (1)

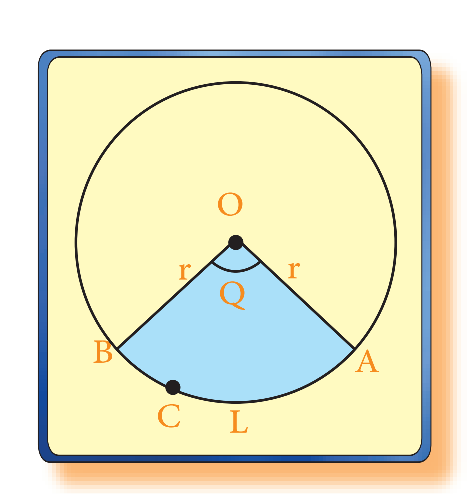
وإذا فرضنا أن قياس الزاوية المركزية للقطاع

بالتقدير الدائري = Q

فان $Q = \frac{L}{r} \Leftarrow L = Q\, r$

وبالتعويض في (1) :

مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2} Q\, r^2$ ..... (2)



الشكل (13 - 4)

نتيجة 1 : إذا فرضنا سطح الدائرة قطاعاً دائرياً زاويته = 2π

∴ مساحة الدائرة $\pi r^2 = \frac{1}{2}(2\pi) \times r^2$

ملاحظة :

محيط القطاع الدائري

$= r + r + L$

$= 2r + L$

حيث L طول قوس القطاع الدائري ، r طول نصف قطر دائرته .

نتيجة 2 : $\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة سطح دائرته}} = \frac{\frac{1}{2} Q r^2}{\pi r^2} = \frac{Q}{2\pi}$

∴ $\frac{Q}{2\pi} = \frac{D^\circ}{360^\circ}$ حيث °D قياس الزاوية المركزية للقطاع بالتقدير الستيني.

∴ $\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة سطح دائرته}} = \frac{Q}{2\pi} = \frac{D^\circ}{360^\circ}$

∴ مساحة القطاع الدائري = $\frac{\text{قياس زاويته بالستيني}}{360^\circ}$ × مساحة سطح دائرته



مثال (13) :

جد مساحة قطاع دائري قياس زاويته يساوي 60° وطول نصف قطر دائرته 8cm.

الحـــل :

$\because$ مساحة القطاع = $\frac{1}{2} Q r^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\pi \, \cancel{60}}{\cancel{180}} \times 64$

$\frac{1}{2} \times \frac{3.14}{3} \times 64 = 33.49 \ cm^2$

حل آخر : مساحة القطاع الدائري = $\frac{D^\circ}{360^\circ} \times$ مساحة دائرته

$= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 64 \times \pi$

$= \frac{1}{6} \times 3.14 \times 64 = 33.49 \ cm^2$

مثال (14) :

قطاع دائري مساحته $15cm^2$ وطول قوسه 6cm جد طول نصف قطر دائرته، محيطه ، قياس زاويته بالستيني .

الحـــل :

1 - مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2} L r$

$15 = \frac{1}{2} \times 6 \times r \Rightarrow r = 5$

2 - محيط القطاع الدائري $= 2r + L$

$= 2 \times 5 + 6 = 16 \ cm$

3 - $\because |Q| = \frac{L}{r} \Leftarrow Q = \frac{6}{5} = 1.2$ زاوية نصف قطرية

ثم $\frac{Q}{D^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \Leftarrow \frac{1.2}{D^\circ} = \frac{3.14}{180^\circ}$

$\therefore D^\circ = \frac{180^\circ \times 1.2}{3.14} = 68.7898^\circ$

[4-7-3] القطعة الدائرية Circular Segment :

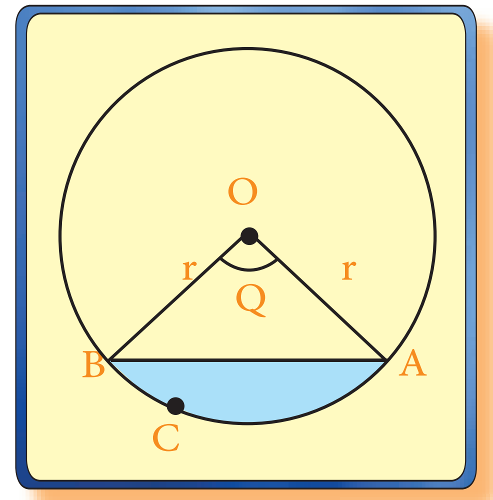
تعريف (8 - 4)

القطعة الدائرية هي جزء من سطح دائرة محدد بقوس فيها ووتر مار بنهايتي ذلك القوس.

تسمى AOB $\measuredangle$ المركزية كما في الشكل (14 - 4)

زاوية القطعة الصغرى وقياسها اصغر من °180

لايجاد مساحة القطعة الدائرية :



الشكل (14 -4)

نفرض أن Q القياس الدائري لزاوية القطعة الصغرى

$\therefore$ مساحة القطعة ACB = مساحة القطاع $(O\overset{\frown}{ACB})$ - مساحة Δ OAB

$\because$ مساحة (القطاع الدائري) $(O\overset{\frown}{ACB}) = \frac{1}{2} Q\ r^2$

مساحة Δ OAB $= \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin Q$

$\therefore$ Δ OAB $= \frac{1}{2} \times r \times r \sin Q$

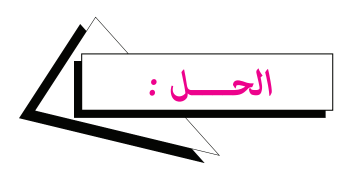
$\therefore$ مساحة القطعة AC $= \frac{1}{2} r^2 \sin Q - \frac{1}{2} Q\ r^2$

مساحة القطعة ACB $= \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin Q)$

حيث Q قياس زاوية القطعة بالتقدير الدائري ، r نصف قطر دائرتها .



جد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها 12cm وقياس زاويتها 30°.



$$\frac{\pi}{180} = \frac{Q}{D^\circ} \Leftarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{30^\circ} \Leftarrow Q = 0.5236$$

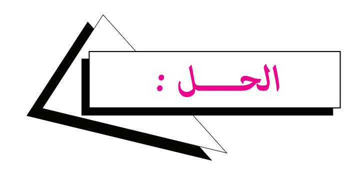
$\therefore$ مساحة القطعة الدائرية $= \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin 30°)$

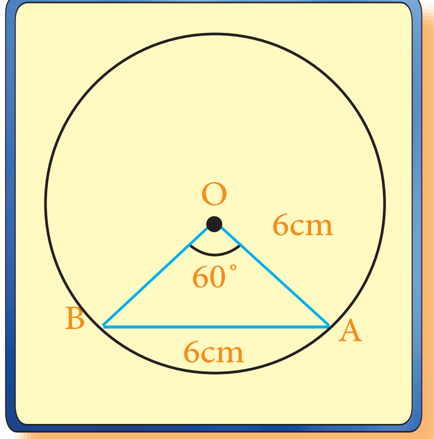
$= \frac{1}{2} \times 144 \times (0.5236 - 0.5)$

$\therefore$ مساحة القطعة الدائرية $= (0.0236) \times 144 \times \frac{1}{2} = 1.7cm^2$



O مركز دائرة نصف قطرها 6cm، رسم فيها وتر طوله 6cm، جد لأقرب cm^2 مساحة القطعة الدائرية الصغرى .





الشكل (15 -4)

Δ AOB متساوي الاضلاع

$\therefore m\sphericalangle AOB = 60^\circ$

$$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{D^\circ} \Leftarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{Q}{60^\circ} \Leftarrow Q = \frac{\pi}{3} = \frac{22}{21} = 1.047$$

مساحة القطعة الدائرية $= \frac{1}{2} r^2 (Q - \sin Q)$

$= \frac{1}{2} \times 36 \ (1.047 - \sin 60^\circ)$

$= 18 \ (1.047 - 0.865)$

$= 18 \ (0.182) = 3.276cm^2$



س1 /

وقف شخص في أعلى برج وأبصر شجرتين تقعان مع قاعدة البرج على إستقامة واحدة، فكانت زاوية إنخفاض قاعدة الشجرة الأولى $70°$ وزاوية إنخفاض قاعدة الشجرة الثانية $50°$ جد المسافة بين الشجرتين مع العلم أن إرتفاع البرج 30m، علماً أن $\tan 50^0 = 1.2$ ، $\tan 70^0 = 2.8$

ج/ 14.28m

س2 /

من نقطة تبعد عن قاعدة برج (50m) وجد أن زاوية إرتفاع قمتها 30^0 فما إرتفاع البرج؟

ج/ 28.9m

س3 /

جد مساحة قطاع دائري طول قوسة 8cm وطول نصف قطر دائرته 3.2cm.

ج/ $12.8cm^2$

س4 /

جد مساحة قطاع دائري قياس زاويته تساوي $100°$ وطول نصف قطر دائرته 10cm.

ج/ $87.3cm^2$

س5 /

قطاع دائري مساحته $37.68cm^2$ وطول نصف قطر دائرته 6cm جد طول قوسه.

ج/ 12.56cm

س6 /

نصف محيط دائرة هو 10cm. جد مساحة قطاع دائري فيها قياس زاويته 45^0.

ج/ $3.98cm^2$

س7 /

جد مساحة قطعة دائرية قياس زاويتها $60°$ وطول نصف قطر دائرتها 8cm.

ج/ $5.81cm^2$

[4-8] إستخدام الحاسبة في إيجاد قيم التطبيقات الدائرية:

علمت في البند [2-4] ان للزاوية نظامين للقياس هما: القياس الستيني والقياس الدائري والحاسبة تستخدم النظامين وهو ما يلاحظ أعلى مفاتيح الحاسبة اليدوية فالقياس الستيني يرمز له DEG أختصاراً لكلمة (DEGREE)درجة.

اما القياس الدائري فيرمز له RAD أختصاراً لكلمة (RADIAN) نصف قطري .

وهذان الرمزان يظهران في أعلى الشاشة بعد الضغط على المفتاح DRG → فالضغطة الأولى تظهر DEG والضغطة الثانية تظهر RAD وبالعكس.

وللنسب المثلثية مفاتيح أيضاً وسنقتصر على نسبة الجيب، نسبة الجيب تمام ونسبة الظل.

فالمفتاح sinيرمز الى الجيب (sine).

والمفتاح cos يرمز الى الجيب تمام (cosine).

والمفتاح tan يرمز الى الظل (tangent).

طريقة استخدام الحاسبة

1. تحدد نظام الزاوية الستيني (DEG) أو الدائري (RAD) بالضغط على (DRG) .
2. تدخل الزاوية حسب النظام.
3. تضغط على مفتاح النسب المثلثية المطلوبة.

الأمثلة الأتية توضح ذلك :



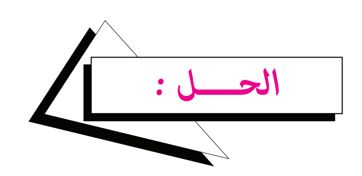
جد (3) tan 350 ° (2) cos 120° (1) sin 30°

ملاحظة :

$\sin(-Q) = -\sin Q$ ،

$\cos(-Q) = \cos Q$ ،

$\tan(-Q) = -\tan Q$



(1) * النظام الستيني : نضغط لتظهر DEG أعلى الشاشة.

* اكتب 30.

* اضغط على (sin) فتحصل على الناتج = 0.5 .

(2) * النظام الستيني: نضغط لتظهر DEG

* اكتب 120.

* اضغط على (cos) فتحصل على الناتج = 0.5 -

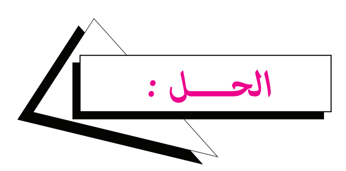
(3) * النظام الستيني: نضغط لتظهر DEG

* اكتب 350 ثم اضغط على (tan) فيكون الناتج ≃ 0 . 1763 -

فيكون $\tan(-350^\circ) \simeq -0.1763$ $(\tan(-Q) = -\tan Q)$.



جد ناتج (1) $\sin \frac{5\pi}{4}$ ، (2) $\cos(-3\pi)$ ، (3) $\tan \frac{7\pi}{5}$



✳ النظام دائري : نضغط لتظهر RAD

✳ نضغط على المفتاح الموجود عادةً على اللوحة 2ndf أو INV ويكون بلون مغاير للأسود (اصفر او احمر مثلاً . . .) .

✳ نضغط على مفتاح: π ⟸ العمليات الحسابية ⟸ النسبة = ناتج

(1) $\sin \frac{5\pi}{4}$

* اضغط لتظهر RAD

* نضغط 2ndf ثم π 3.141592654 ⟸ اضرب ×5 = 15.70796327

÷ 4 = 3.926990817 ثم sin = 0.707106781 -

(2) $\cos(-3\pi)$

من المعلوم أن $\cos Q = \cos(-Q)$ (نحذف الاشارة السالبة).

* اضغط لتظهر RAD.

* اضغط 2ndf ثم π = 3.141592654 ⟸اضرب× 3= 9. 424777961

ثم cos = 1 -

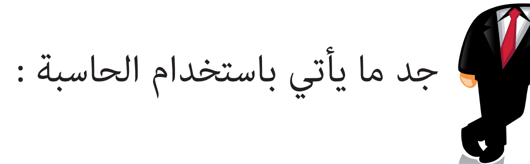
(3) $\tan \frac{7\pi}{5}$

* اضغط لتظهر RAD.

*اضغط 2ndf ثم π = 3.141592654 ⟸ اضرب × 7 = 21 .9114858

⟸ ÷ 5 = 4 .398229715 ثم اضغط tan = 3.07763537 .





جد ما يأتي باستخدام الحاسبة :

(1) $\sin \frac{\pi}{6}$ (2) $\cos(-400°)$ (3) $\tan(-15°)$ (4) $\tan(-36°)$

(5) $\cos \frac{2\pi}{3}$ ، (6) $\tan \frac{8\pi}{5}$



(1) 0.5

(2) 0.766044443

(3) - 0.267949192

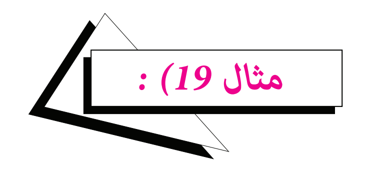
(4) - 0.588

(5) - 0.5

(6) -3.077683537

[4-9] حل المثلث القائم الزاوية Solution of Right Angled Triangle :

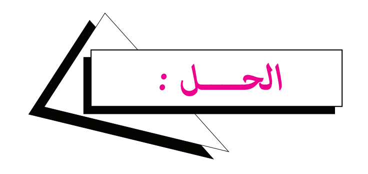
يشتمل كل مثلث على ستة عناصر [ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا] ويقصد بحل المثلث إيجاد قيم عناصره المجهولة.

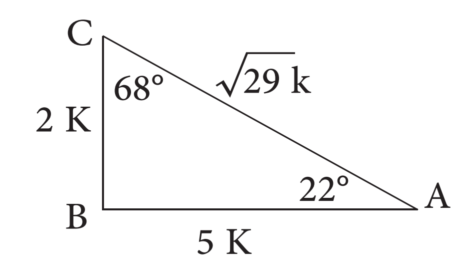


إذا كان $\tan 22° = 0.4$ أوجد :

(1) $\sin 22°$ ، $\cos 22°$

(2) $\sin 68°$ ، $\cos 68°$





$\tan 22° = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

∴ المقابل = 2k

∴ المجاور = 5k

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ ...... مبرهنة فيثاغورس

$4K^2 + 25K^2 = (Ac)^2$

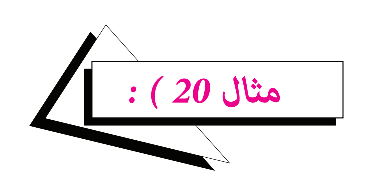
$AC = \sqrt{29}\, K$

(1) $\sin 22° = \frac{BC}{AC} = \frac{2k}{\sqrt{29}k} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

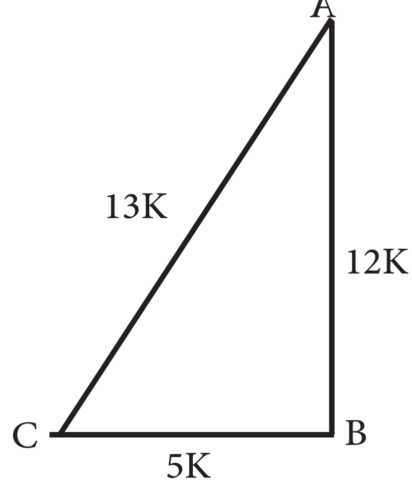
$\cos 22° = \frac{AB}{AC} = \frac{5k}{\sqrt{29}k} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

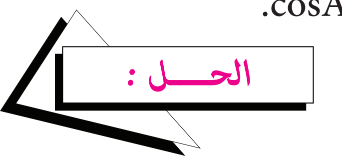
(2) $\sin 68° = \sin(90° - 22°) = \cos 22° = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\cos 68° = \cos(90° - 22°) = \sin 22° = \frac{2}{\sqrt{29}}$



إذا علمت أن $\cos C = \frac{5}{13}$ في Δ ABC القائم الزاوية في B. جد $\tan C$ ، $\sin A$, $\cos A$.





نرسم ABC القائم في B :

$\cos C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{5k}{13k}$

$\because (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ (فيثاغورس)

$\therefore 169\ K^2 = (AB)^2 + 25K^2$

$\therefore (AB)^2 = 144\ K^2 \Rightarrow AB = 12K$

$\tan C = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$

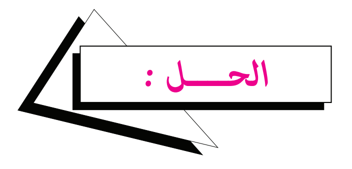
$\sin A = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$

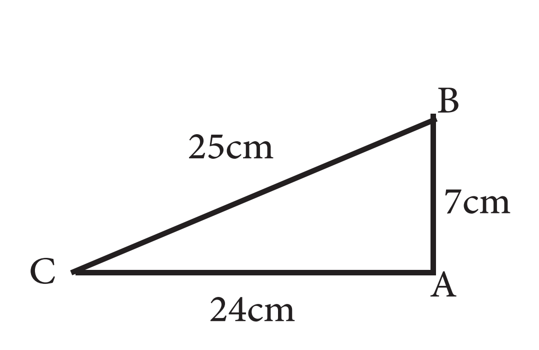
$\cos A = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$



ABC مثلث قائم الزاوية في A فيه $AC = 24$ cm ، $AB = 7$ cm جد :

$\sin C$ ، $\sin B$ ، $\tan C$ ، $\cos B$





$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

$(BC)^2 = (7)^2 + (24)^2 = 49 + 576 = 625$

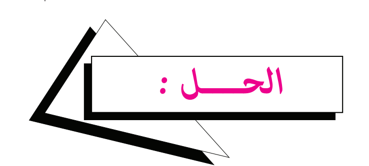
$\therefore BC = 25$ cm

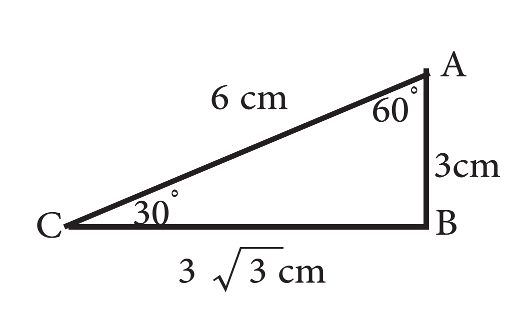
$\therefore \sin C = \frac{7}{25}$ ، $\sin B = \frac{24}{25}$

$\tan C = \frac{7}{24}$ ، $\cos B = \frac{7}{25}$



حل المثلث ABC القائم الزاوية في B . اذا علمت ان AB = 3 cm AC = 6 cm





$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$36 = 9 + (BC)^2$

$BC = 3\sqrt{3}$

استكملنا ايجاد اطوال الاضلاع ، والان سنجد زوايا المثلث الباقية

$\tan C = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow C = 30°$

$m\angle A = 90° - 30° = 60°$

الخلاصة

في حل المثلث القائم الزاوية نستخدم:

* النسبة المثلثية tanQ, cosQ, sinQ

* نستخدم مبرهنة فيثاغورس

وحسب طبيعة كل سؤال



س1 /

ABC مثلث قائم الزاوية في B فيه $\sin C = \frac{8}{17}$ جد : sin A ، tan C ، cos C .

س2 /

AB C مثلث قائم الزاوية في C فيه B C = 24 cm ، AB = 25 cm جد قيمة $\sin^2 B + \cos^2 B$ وباستخدام المعلومات المعطاة.

س3 /

إذا كان $\frac{4}{5} = \cos Q$ فأوجد tan Q ، sin Q

س4 /

سلم طوله 10 متر مرتكز طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الآخر على حائط شاقولي فاذا كانت الزاوية بين السلم والأرض 30° فما بعد طرفه الأعلى عن الأرض وطرفه الأسفل عن الحائط؟

استعمل ($\sqrt{3} = 1.73$)

س5 /

A B C مثلث قائم الزاوية في C فيه $m\angle CAB = 60°$ ، A B = 20cm جد مساحة منطقته.

س6 /

جد قيمة:

(A) $\frac{3}{4}\tan^2 30° + 2\sin 60° + 3\tan 45° + \cos^2 30° - \tan 60°$

(B) $\cos^2 45° \sin 60° \tan 60° \cos^2 30°$.

(C) sin 120° ، cos 135°، tan 150°.

س7 /

في الشكل المجاور :

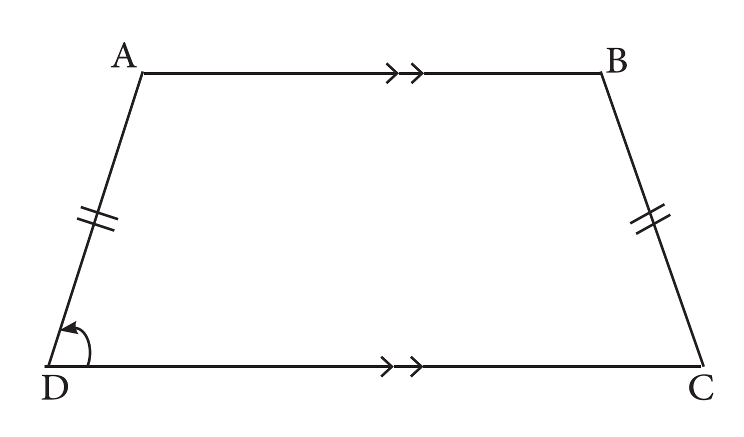
ABCD شبه منحرف

فيه AD=BC

(متساوي الساقين) ،

AB=14cm، DC=20cm،

AD=6cm،جد m<CDA



5 الفصل الخامس : المتجهات Vectors

[5-1] مفهوم المتجه هندسياً وجبرياً

[5-2] المتجه المقيد

[5-3] إيجاد طول المتجه واتجاهه

[5-4] جمع المتجهات وضربها بعدد حقيقي

[5-5] اعطاء المتجه بدلالة متجهي الوحدة في المستوى

الاهداف السلوكية

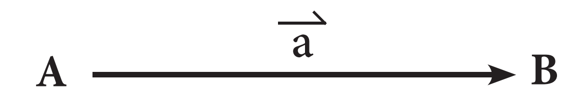
ينبغي للطالب في نهاية هذا الفصل يكون قادراً على ان:

- يتعرف على المتجه هندسياً.
- يتعرف على المتجه جبرياً
- يتعرف على المتجه المقيد
- يتمكن من ايجاد طول المتجه المقيد
- يتمكن من ايجاد اتجاه المتجه المقيد
- يتمكن من جمع المتجهات
- يتمكن من ضرب المتجه بعدد حقيقي
- يتعرف على متجهي الوحدة
- يتمكن من وضع المتجه بدلالة متجهي الوحدة

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
المتجه a	$\overrightarrow{a} = (x , y)$
طول المتجه a	$\|\|\overrightarrow{a}\|\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
* المتجه الصفري	$\overrightarrow{0} = (0 , 0)$
متجهي الوحدة u_1 , u_2	$\overrightarrow{u_1} = (1 , 0) , \overrightarrow{u_2} = (0 , 1)$

[5-1] مفهوم المتجه ((الهندسي والجبري))

مقدمة : بعض الكميات الفيزيائية والرياضية مثل الطول والكتلة والزمن والحجم والمسافة وغيرها تتحدد تحدداً كاملاً بذكر عدد يدل على مقدارها فقط، مثل هذه الكميات تسمى الكميات العددية أو الكميات غير المتجهة. وكميات أخرى مثل القوة والسرعة والأزاحة يكون الاتجاه بالاضافة الى المقدار ضرورياً في تحديدها تحديداً كاملاً مثل هذه الكميات تسمى الكميات المتجهة. نشأت فكرة المتجه أصلاً في علم الميكانيك لتمثيل القوة والسرعة والإزاحة وغيرها، وإستخدمت القطعة المستقيمة المتجهة من نقطة مثل A تسمى نقطة البدء الى نقطة أخرى مثل B تسمى نقطة الانتهاء لتمثيل المتجه ويرمز عادة للمتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ حيث يعني السهـــم أن القطعة موجهة من A الى B وقد يرمز للمتجه بحرف واحد مثل $\overrightarrow{a}$ (مع معرفة بدايته ونهايته) هناك إتجاهان لدراسة المتجهات :-

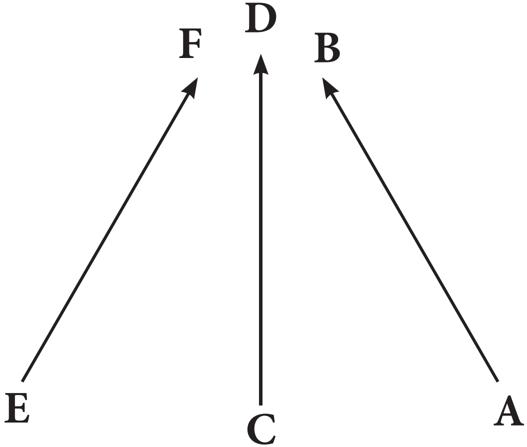


(1) هندسي

(2) جبــري

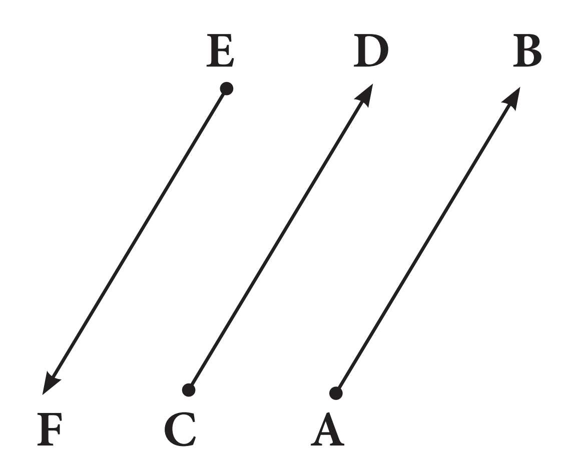
وسنؤكد في دراستنا في هذا الفصل على الاتجاه الجبري مستفيدين من الاتجاه الهندسي لأجل التوضيح.

مفاهيم أساسية **المتجه:** من النـاحية الهندسية يعني قطعة مستقيم موجهة كمـــا أسلفنـــا فالقطع AB ، CD ، EF تمثل متجهات مختلفة .



الشكل (1 - 5)

المتجهان المتوازيان: إذا كانت قطعتاهما متوازيتين، قد يكون للمتجهين المتوازيين الاتجاه نفسه وقد يكونان بالاتجاه متعاكسين . من الشكل (2-5) نلاحظ ان $\overrightarrow{AB}$ يوازي $\overrightarrow{CD}$ ولهما نفس الاتجاه ولكن $\overrightarrow{AB}$ يوازي $\overrightarrow{EF}$ كما انهما متعاكسان في الاتجاه



الشكل (2 - 5)

المتجهان المتكافئـان: إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه

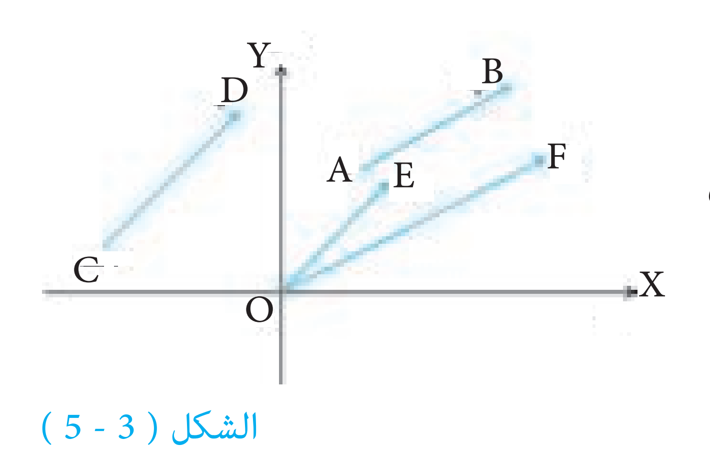
[5-2] المتجه المقيد :*Conorlical Vector*

لكل متجه في المستوي يوجد متجه وحيد يكافئه يبتدئ من نقطة الأصل (0 , 0) ، لذا فبدلاً من التعامل من عدد غير منته من المتجهات المتساوية في الطول والاتجاه، سنتخذ المتجه المكافيء لها والذي يبتدئ بنقطة الأصل ممثلاً عنها جميعاً، يسمى المتجه الذي يبتدئ بنقطة الاصل بالمتجه القياسي أو المتجه المقيد. وتسمى بقية المتجهات غير المرتبطة بنقطة الاصل (المتجه الحر أو المتجه الطليق).

لاحظ أن :

$\overrightarrow{OE}$ ، $\overrightarrow{OF}$ متجهان مقيدان

بينما $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{CD}$ متجهان طليقان

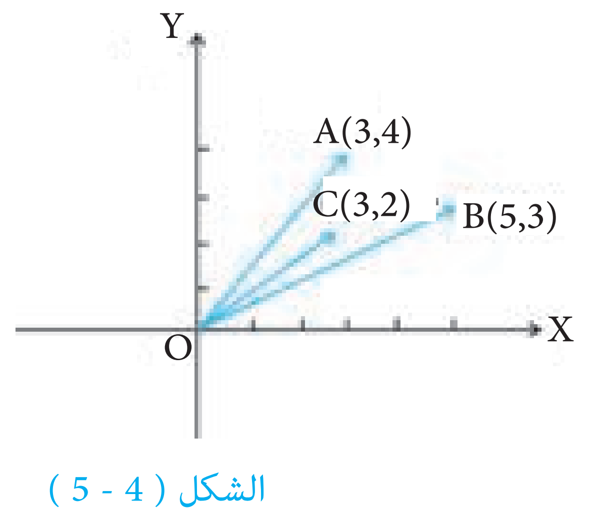


الشكل (3 - 5)

[5-2-1] المتجهات وتمثيلها :

لقد مثلنا الزوج (4 , 3) بنقطة في المستوي المتعامد المحورين وكل زوج من الأعداد الحقيقية نستطيع تمثيله بنقطة واحدة فالزوجان المرتبان (3 , 5)، (2 , 3) يتمثلان بالنقطتين B ، C على التوالي .

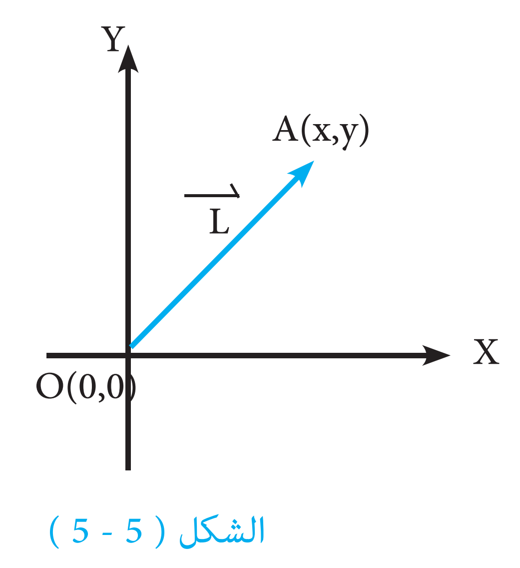
ونستطيع تمثيل الزوج المرتب من الأعداد الحقيقية بقطعة متجهه بدايتها نقطة الاصل ونهايتها الزوج المرتب المعلوم فالقطع الموجهة $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OB}$ ، $\overrightarrow{OC}$



الشكل (4 - 5)

تمثل الأزواج المرتبة (3,4) ، (5,3) ، (3,2) . على هذا الأساس سنمثل المتجه بزوج من الأعداد الحقيقية نكتب : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A} = (x , y)$

لأننا سوف نقتصر في دراستنا على المتجهات المقيدة فقط، لذا كلها تبتدئ بنقطة الأصــل فنذكر النقطة النهائية فقط .



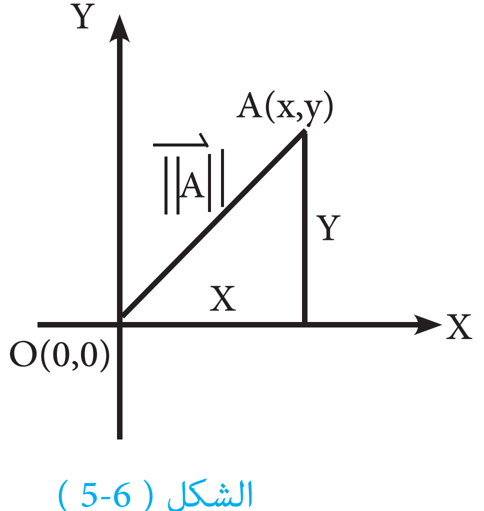
الشكل (5 - 5)

[5-3] طول المتجه واتجاهه :

[5-3-1] طول المتجه :

هي المسافة بين نقطة بداية المتجه ونقطة أنتهائه.

فطول $\overrightarrow{AB}$ يساوي طول AB ويرمز له $||\overrightarrow{AB}||$.



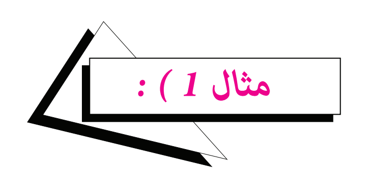
الشكل (5-6)

تعريف (5-1)

اذا كان $\overrightarrow{A}$ متجها حيث $\overrightarrow{A} = (x,y)$ فان :

$$||\overrightarrow{OA}|| = ||\overrightarrow{A}|| = OA = \sqrt{x^2 + y^2}$$

لاحظ الشكل (5 - 6)



جد طول كل من المتجهات الأتية :

$(3,4)$ ، $\left(\frac{7\sqrt{2}}{10} , \frac{\sqrt{2}}{10}\right)$ ، $(-12 , -9)$



طول المتجه $(3,4)$ هو : $\sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

طول المتجه $\left(\frac{7\sqrt{2}}{10} , \frac{\sqrt{2}}{10}\right)$ هو : $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{2}}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{100} + \frac{98}{100}} = \sqrt{\frac{100}{100}} = 1$

طول المتجه $(-12 , -9)$ هو : $\sqrt{(-12)^2 + (-9)^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$

تعريف (5-2)

المتجه الصفري Zero Vector : يسمى المتجه $(0,0)$ بالمتجه الصفري لان نقطة بدايته ونهايته هي نقطة الأصل . ويرمز له $\vec{0}$ ، وطول $\vec{0}$ = $\|\vec{0}\|$ = صفر .

تعريف (5-3)

المتجهان المتساويان: يقال للمتجهين (x_2,y_2) و (x_1 , y_1) أنهما متساويان أذا وفقط إذا كان $x_1 = x_2$ ، $y_1 = y_2$.

تعريف (5-4)

اتجاه المتجه: الزاوية التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

[5-3-2] أيجاد اتجاه المتجه :

إذا كان $\overrightarrow{A} = (x , y)$ متجهاً فأن إتجاه $\overrightarrow{A}$ يعرف بقياس الزاوية Q حيث $0 \le Q < 2\pi$ مقاسة بأتجاه معاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة من محور السينات الموجب الى المتجه $\overrightarrow{A}$

لاحظ ان المتجه الصفري لايمكن تعريف اتجاهه.

$$\cos Q = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \sin Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



جد طول واتجاه $\overrightarrow{OB} = (\sqrt{3} , -1)$



$$\|\overrightarrow{OB}\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

نفرض أن Q يساوي قياس الزاوية التي يحددها المتجه $\overrightarrow{OB}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

فيكون $\cos Q = \frac{\sqrt{3}}{2}$

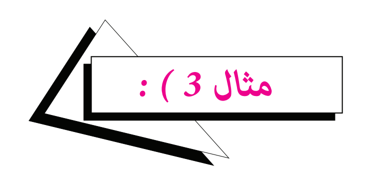
$\sin Q = \frac{-1}{2}$

من الشكل (7-5) نلاحظ ان Q

تقع في الربع الرابع

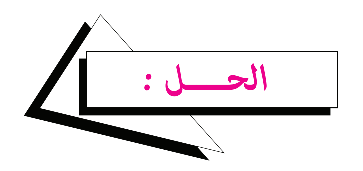
اتجاه المتجه هو : $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

الشكل (7 - 5)



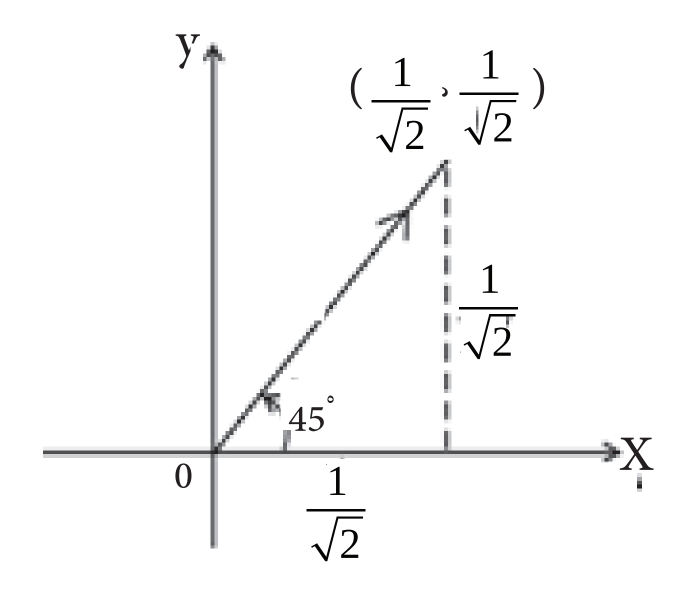
مثال 3) :

جد إتجاه المتجه ($\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$)



الحــــل :

نفرض أن Q تساوي قياس زاوية المتجه ($\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$)



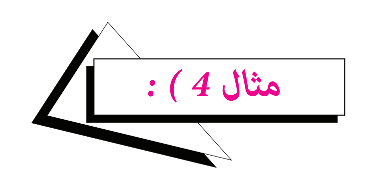
الشكل (8 - 5)

$$\cos Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

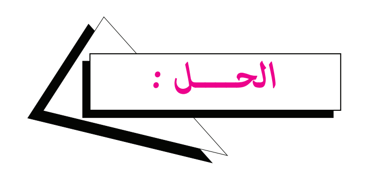
$$\sin Q = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

من الشكل (8-5)نلاحظ:

Q تقع في الربع الاول فتكون $\frac{\pi}{4}$



جد المتجه الذي طوله = 5 وحدات وإتجاهه $\frac{\pi}{6}$



نفرض المتجه $= a\ (x, y)$

$$\cos Q = \frac{x}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{5}$$

$$\therefore x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin Q = \frac{y}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{5}$$

$$\therefore y = \frac{5}{2}$$

$\therefore$ المتجه هو $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$

الخلاصة

1) ان طول $\vec{A}(x,y)$ يساوي $\|\vec{A}\|$ حيث $\|\vec{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

2) لايجاد اتجاه $\vec{A}(x,y)$ نستخدم $\sin\theta = \frac{y}{\|\vec{A}\|}$, $\cos\theta = \frac{x}{\|\vec{A}\|}$

تمرينات (1 - 5)

س1 /

جد طول وإتجاه كل من المتجهات الآتية ثم ارسم القطعة المستقيمة الموجهه التي تمثل كلاً منها:

أ) $(-2, 2)$ ، ب) $(-3, 0)$ ، جـ) $(1, \sqrt{3})$

د) $(0, 6)$ ، هـ) $(\sqrt{3}, -1)$ ، و) $(-3, -3)$ ، ز) $(0, -8)$

س2 /

جد المتجه الذي طوله واتجاهه كما يلي:

أ) $\|\overrightarrow{B}\| = 2$ ، $Q = \frac{\pi}{6}$

ب) $\|\overrightarrow{B}\| = \sqrt{2}$ ، $Q = \frac{\pi}{4}$

جـ) $\|\overrightarrow{B}\| = 4$ ، $Q = \pi$

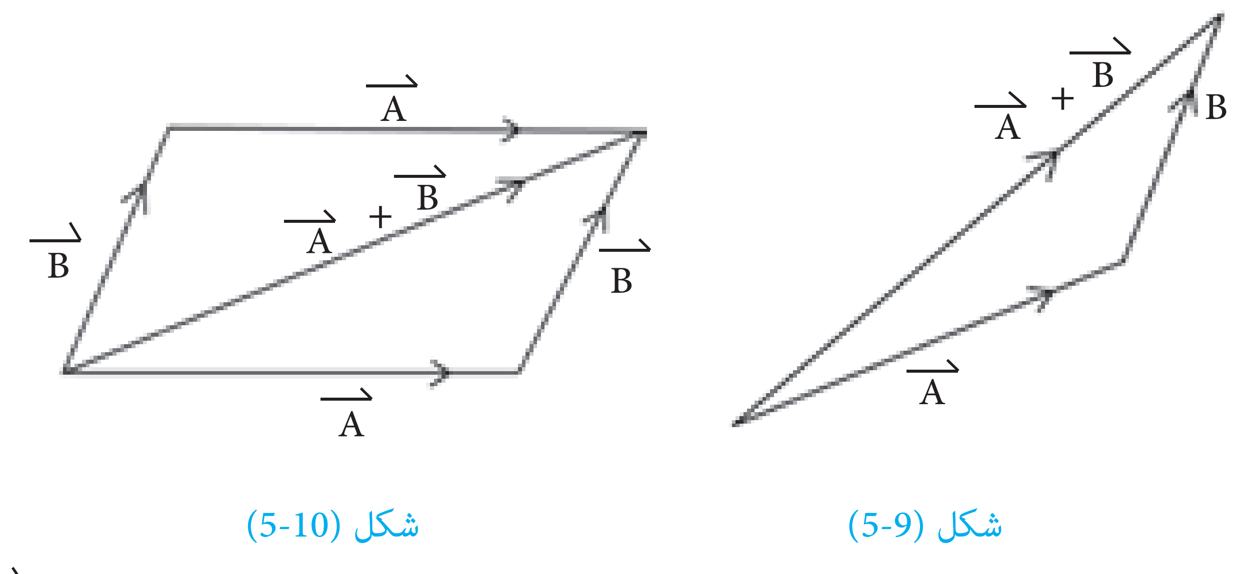
د) $\|\overrightarrow{B}\| = 3$ ، $Q = \frac{3\pi}{2}$

هـ) $\|\overrightarrow{B}\| = 4$ ، $Q = \frac{2\pi}{3}$

[5-4] جمع المتجهات وضربها بعدد حقيقي :

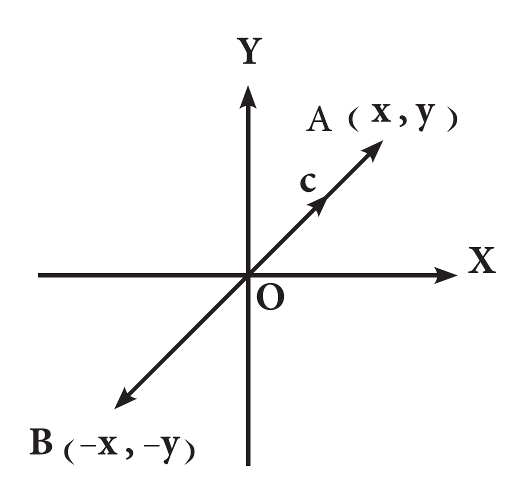
[5-4-1] جمع المتجهات :

لجمع متجهين مثل $\overrightarrow{B}$ ، $\overrightarrow{A}$ هندسياً نرسم أحدهما ومن نقطة إنتهائه المتجه الآخر ويكون المتجه الذي يبتدئ بنقطة بدء المتجه الاول وينتهي بنقطة انتهاء المتجه الثاني هو حاصل جمع المتجهين لاحظ شكل (5-9) ويتم إيجاد مجموع متجهين بطريقة متوازي الاضلاع، إذ يمثل المجموع قطر متوازي الاضلاع الذي يكون المتجهان ضلعين متجاورين فيه كما في شكل (10 - 5) .



شكل (5-10) شكل (5-9)

قد يقع متجهان على مستقيم واحد عندئذ يقال أنهما على إستقامة واحدة كما في المتجهان $\overrightarrow{A}$ ، $\overrightarrow{C}$ بينما المتجهان $\overrightarrow{B}$ ، $\overrightarrow{A}$ متضادان في الاتجاه كما في الشكل (11 - 5) .



الشكل (5-11)

فاذا كان المتجهان $\vec{B}$ ، $\vec{A}$ على إستقامة واحدة وكانا متساويين في الطول ومتعاكسين في الاتجاه

وكان $\vec{A} = (x, y)$ فان $\vec{B} = (-x , -y)$

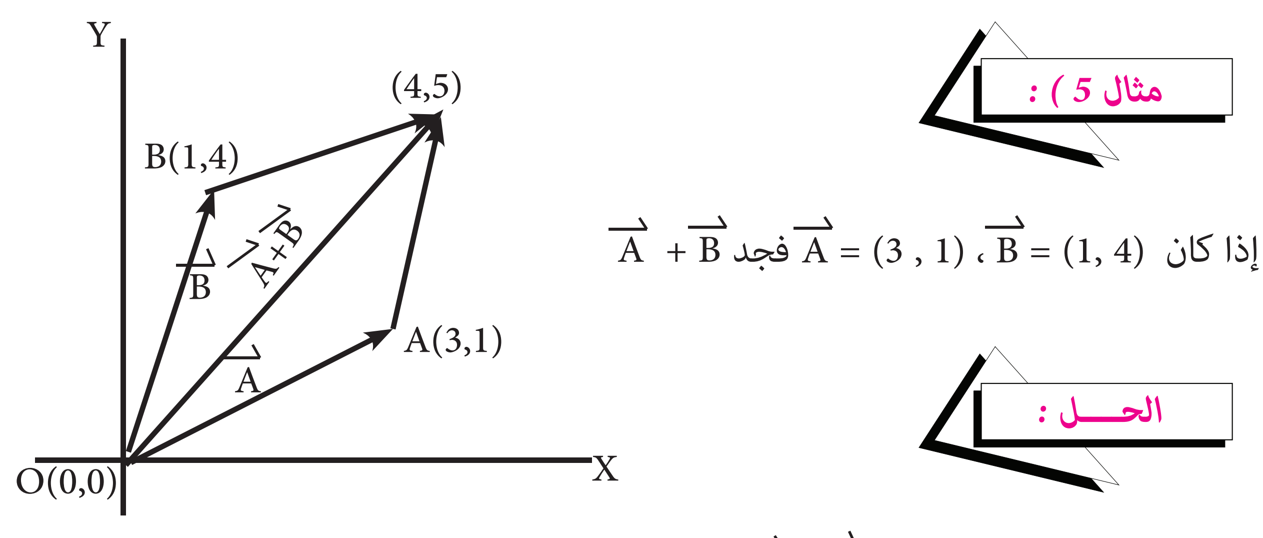
لاحظ $\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

يرمز لسالب المتجه A بالرمز $-\vec{A}$.

تعريف (5-5)

إذا كان $\vec{B} = (x_2, y_2)$ ، $\vec{A} = (x_1,y_1)$ فان:

$$\vec{A} + \vec{B} = (x_1, y_1) + (x_2 , y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$$



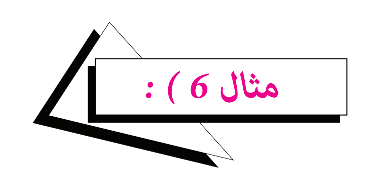
إذا كان $\vec{B} = (1, 4)$ ، $\vec{A} = (3 , 1)$ فجد $\vec{A} + \vec{B}$

الشكل (12 - 5)

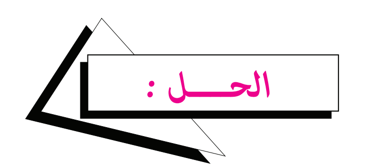
$$\vec{A} + \vec{B} = (3 ,1) + (1 , 4) = (4 , 5)$$

ويمكن توضيح ذلك هندسياً كما في الشكل (12 - 5)

لاحظ أن $\vec{A} + \vec{B}$ يمثل قطر متوازي الاضلاع المكمل للمتجهين $\vec{B}$ ، $\vec{A}$



إذا كان $\vec{B} = (5, -2)$ ، $\vec{A} = (-4, 3)$ فأوجد $\vec{A} + \vec{B}$.



$$\vec{A} + \vec{B} = (-4, 3) + (5, -2) = (1, 1)$$

[5-4-2] خواص جمع المتجهات :

(1) الانغلاق: إذا كان كل من $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ متجهاً فان $\vec{A} + \vec{B}$ متجهاً أيضاً .

(2) التجميع: إذا كان كل من $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ متجهاً

فان $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

(3) التبديل: إذا كان كل من $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ متجهاً فان $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

(4) وجود المحايد الجمعي: المتجه الصفري هو العنصر المحايد لعملية الجمع في المتجهات

ومعناه: إذا كان $\vec{A}$ أي متجه فان $\vec{A} + (0,0) = (0,0) + \vec{A} = \vec{A}$

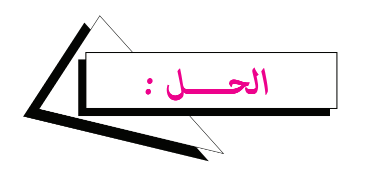
(5) وجود النظير الجمعي: إذا كان $\vec{A}$ أي متجه فيوجد متجه آخر هو $\vec{B} = -\vec{A}$

بحيث $\vec{A} + (\vec{B}) = (\vec{B}) + \vec{A} = (0,0)$

(6) خاصية الحذف: اذا كان $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ متجهاً وكان $\vec{A} + \vec{B} = \vec{A} + \vec{C}$ فان $\vec{B} = \vec{C}$



جد النظير الجمعي للمتجه $(-2, 3)$



النظير الجمعي للمتجه $(-2 , 3)$ هو $(2 , -3)$ لأن :

$$(-2, 3) + (2, -3) = (-2 + 2, \ 3 + (-3)) = (0, 0)$$

[5-4-3] ضرب المتجه بعدد حقيقي:

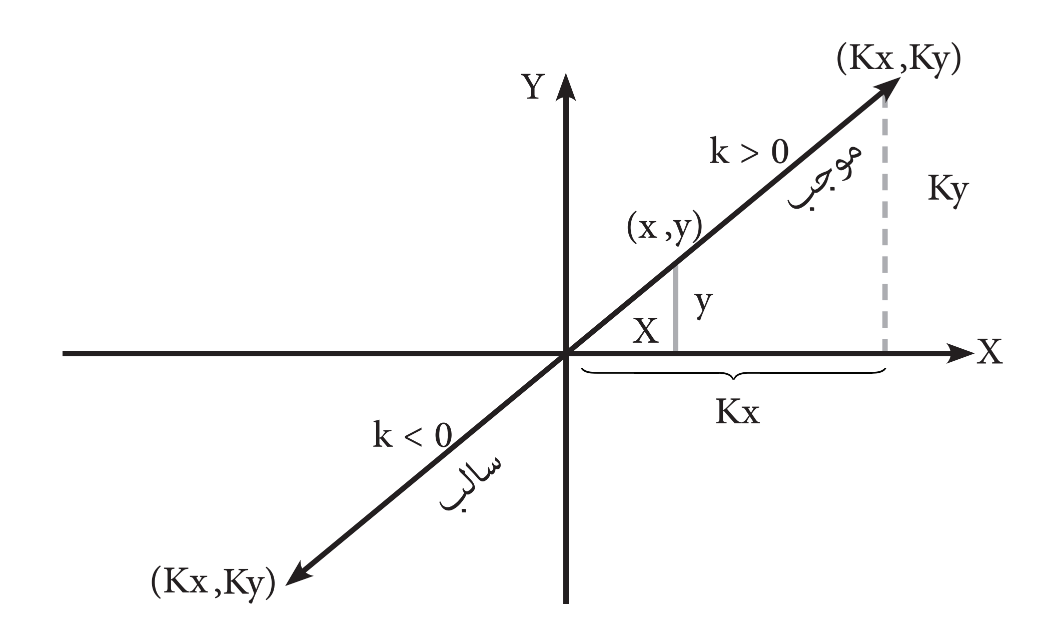
تعريف (6 - 5)

إذا كان $\overrightarrow{A} = (x, y)$ وكان K أي عدد حقيقي فإن $K\overrightarrow{A} = \overrightarrow{A}K = (Kx, Ky)$ ويمكن توضيح هذا التعريف هندسياً كما يلي :

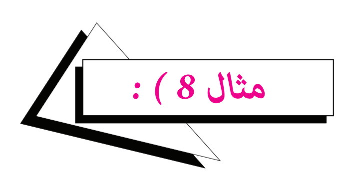
نفرض أن $\overrightarrow{A} = (x, y)$ فإن $K\overrightarrow{A}$ يمثل متجهاً على إستقامة $\overrightarrow{A}$ وطوله يساوي $K\,||\overrightarrow{A}||$ أي K مرة بقدر طول المتجه $\overrightarrow{A}$ عندما يكون $K > 0$ وله اتجاه المتجه $\overrightarrow{A}$ نفسه .

لاحظ الشكل (13 - 5) أما إذا كانت $K < 0$ (سالبة) فان المتجه $K\overrightarrow{A}$ يقع على إستقامة $\overrightarrow{A}$ وطوله يساوي $K\,||\overrightarrow{A}||$.

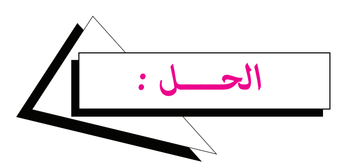
أي K مرة بقدر طول $\overrightarrow{A}$ وله إتجاه معاكس لاتجاه $\overrightarrow{A}$.



شكل (13 - 5)



إذا كان $\vec{C} = (3, -1)$ فجد $-3\vec{C}$ ، $\frac{1}{2}\vec{C}$ ، $2\vec{C}$



$2\vec{C} = 2(3,-1) = (6 , -2)$

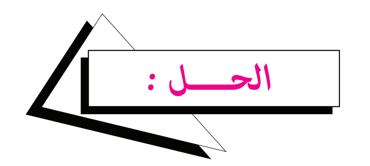
$\frac{1}{2}\vec{C} = \frac{1}{2}(3,-1) = (\frac{3}{2} , \frac{-1}{2})$

$-3\vec{C} = -3\ (3 , -1) = (-9,3)$



اذا كان $\vec{B} = (4 , 3)$ ، $\vec{A} = (3 , -2)$ وكان $L = -2$ ، $K = 3$

جد $(1)\ \vec{A} + \vec{B}$ $\quad (2)\ K\vec{A}$ $\quad (3)\ L\vec{B}$ $\quad (4)\ K\vec{A} + L\vec{B}$



$(1)\ \vec{A} + \vec{B} = (3 + 4 , -2 + 3) = (7 , 1)$

$(2)\ K\vec{A} = 3\ (3 , -2) = (9 , -6)$

$(3)\ L\vec{B} = -2\ (4 , 3) = (-8 , -6)$

$(4)\ K\vec{A} + L B = (9 , -6) + (-8 , -6)$

$= (1 , -12)$

[5-4-4] خواص عملية ضرب المتجهات بعدد حقيقي:

(1) خاصية التوزيع: لكل $\vec{A}$، $\vec{B}$ متجه ، K عدد حقيقي يكون :

$K(\vec{A} + \vec{B}) = K\vec{A} + K\vec{B}$

كذلك $(\vec{A} + \vec{B})K = \vec{A}K + \vec{B}K$

(2) خاصية التجميع: لكل $\vec{A}$ متجه وكل من $K ، L \in R$ يكون:

$(K \times L)\vec{A} = K(L\vec{A}) = L(K\vec{A})$

(3) خاصية الحذف: لكل $\overrightarrow{B}$ ، $\overrightarrow{A}$ متجه ، $K \in R$ حيث $K \neq$ صفر

فاذا كان $K\overrightarrow{B} = K\overrightarrow{A}$ فان $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$ وبالعكس .

(4) $\overrightarrow{A} = 1 \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{A} \times 1 = \overrightarrow{A}$

(5) $0 \times \overrightarrow{A} = \overrightarrow{A} \times 0 = \overrightarrow{0}$

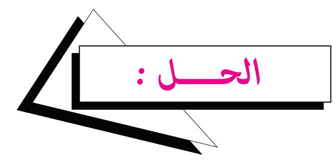
[5-4-5] طرح متجهين :

تعريف (7 - 5)

إذا كان كل من $\overrightarrow{B}$ ، $\overrightarrow{A}$ متجهاً فان $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ يعرّف أنه $\overrightarrow{A} + (-\overrightarrow{B})$



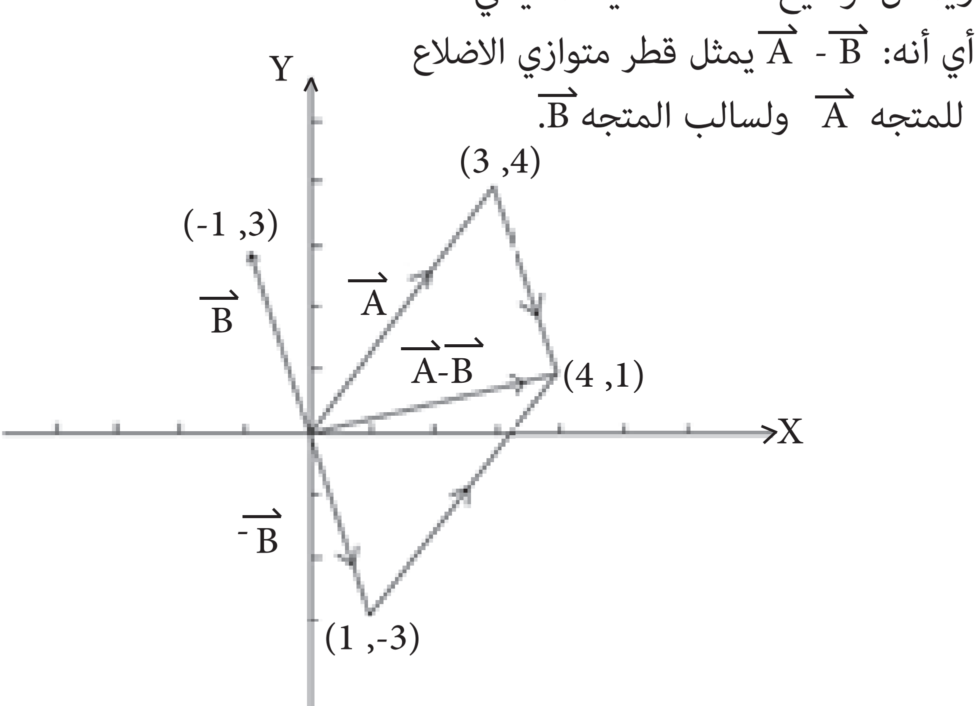
إذا كان $\overrightarrow{B} = (-1 , 3)$ ، $\overrightarrow{A} = (3 , 4)$ جد $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$



$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + (-\overrightarrow{B}) = (3 , 4) + (1 , -3) = (4 , 1)$

ويمكن توضيح ذلك هندسياً كما يأتي:

أي أنه: $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ يمثل قطر متوازي الاضلاع للمتجه $\overrightarrow{A}$ ولسالب المتجه $\overrightarrow{B}$.

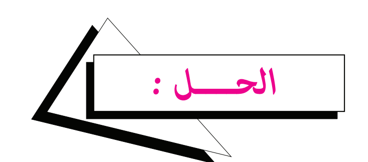


الشكل (14 - 5)



إذا كان $\vec{A} = (2 , 3)$ ، $\vec{B} = (-2 , -1)$ ، $K = 2$ ، $L = -1$

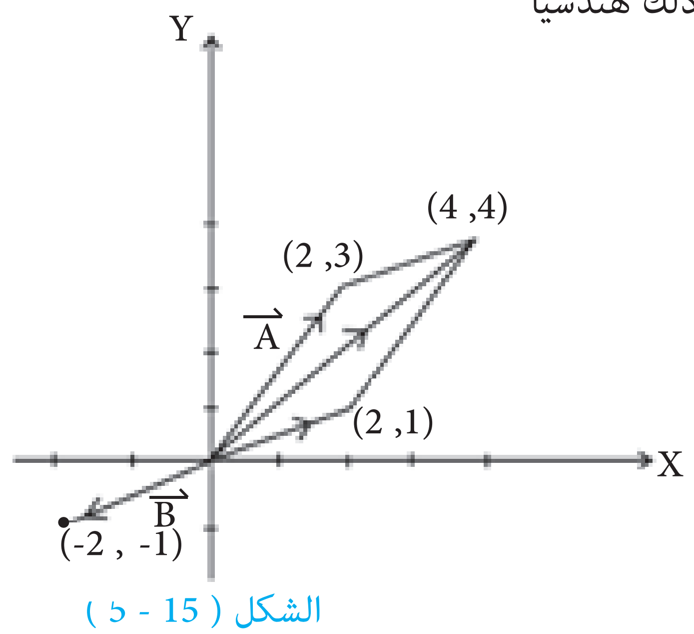
(1) $\vec{A} - \vec{B}$ (2) $K\vec{A} - L\vec{B}$ ووضح ذلك هندسياً



$$(1)\ \vec{A} - \vec{B} = (2 , 3)-(-2 , -1)$$

$$= (2 , 3)+(2 , 1)=(4 , 4)$$

والشكل (5- 15) يوضح ذلك :



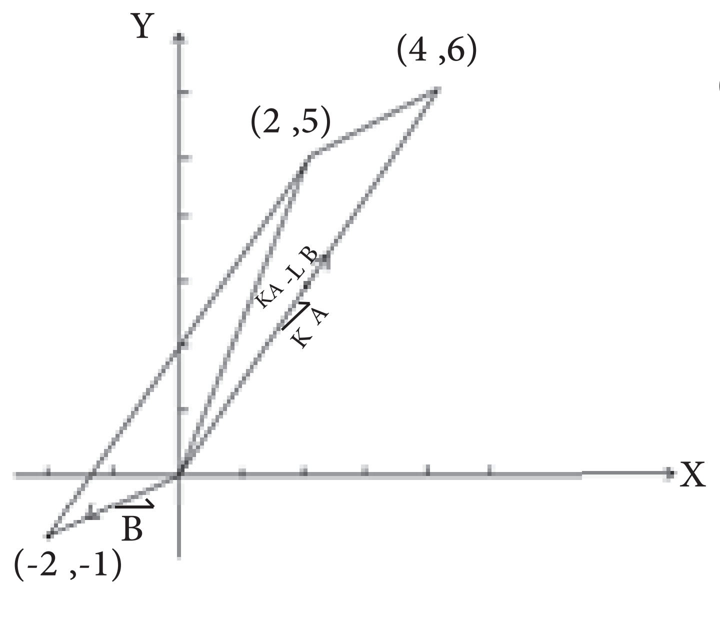
الشكل (15 - 5)

$$(2)\ K\vec{A} - L\vec{B} = 2\ (2 ,3) - (-1)(-2,-1)$$

$$= (4 , 6) + (-2,- 1)$$

$$= (2 , 5)$$

ويوضح ذلك بالرسم الآتي:



الشكل (16 - 5)

نرسم $\vec{A}$ ثم نمدّه بقدر طوله فنحصل على $2\vec{A}$ ثم نرسم B ونجد $-\vec{B}$

ثم $\vec{B} = -\vec{B} \times -1$ أي اننا نعود

الى $\vec{B}$ ثانية ثم نجمع $2\vec{A} + \vec{B}$

كما فعلنا في السؤال السابق .

[5-5] إعطاء المتجه بدلالة متجهي الوحدة في المستوي:

[5 - 5 - 1] متجه الوحدة : *Unit Vector*

تعريف (8 - 5)

(1) متجه الوحدة الاساسي $\overrightarrow{U}_1$ هو القطعة المستقيمة الموجهه التي بدايتها نقطة الاصل وطولها وحدة واحدة واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور السينات ويرمز له $\overrightarrow{U}_1 = (1 , 0)$.

(2) متجه الوحدة الأساسي U_2 هو القطعة المستقيمة الموجهه التي بدايتها نقطة الأصل وطولها وحده واحده واتجاهها هو الاتجاه الموجب لمحور الصادات ويرمز له $\overrightarrow{U}_2 = (0 , 1)$.

اذا كان $\overrightarrow{C} = (x , y)$ فان:

$\overrightarrow{C} = (x , 0) + (0 , y)$

$\overrightarrow{C} = x (1 , 0) + y (0 , 1)$

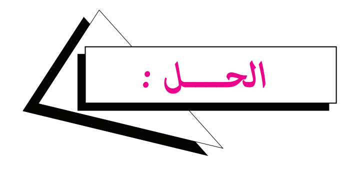
$\overrightarrow{C} = x\overrightarrow{U}_1 + y\overrightarrow{U}_2$ هذا يمثل المتجه $\overrightarrow{C}$ بدلالة متجهي الوحدة $\overrightarrow{U}_1$ ، $\overrightarrow{U}_2$

فمثلاً ويمكننا كتابة المتجهات $(9 , 0)$ ، $(-3 , 0)$ ، $(0 , -2)$ ، $(0 , 6)$ بدلالة $\overrightarrow{U}_1$ ، $\overrightarrow{U}_2$ كالآتي :

$(9,0)= 9\overrightarrow{U}_1$ ، $(-3 , 0) = -3\overrightarrow{U}_1$ ، $(0 ,-2) = -2\overrightarrow{U}_2$ ، $(0 , 6) = 6\overrightarrow{U}_2$



إذا كان $\overrightarrow{A} = (4 , 7)$ ، $\overrightarrow{B} = (-5 , 3)$ جد $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$ وعبر عن الناتج بدلالة متجهي الوحدة .



$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (4 , 7) + (-5 , 3) = (-1, 10) = -(1, 0) + 10(0 , 1) = -\overrightarrow{U}_1 + 10\overrightarrow{U}_2$$

وعلى هذا الأساس يمكننا كتابة أي متجه بدلالة $\overrightarrow{U}_2$ ، $\overrightarrow{U}_1$ كما في الامثلة الآتية :

$(2, 5) = 2\overrightarrow{U}_1 + 5\overrightarrow{U}_2$

$(-4, 2) = -4\overrightarrow{U}_1 + 2\overrightarrow{U}_2$

$(-2, -3) = -2\overrightarrow{U}_1 - 3\overrightarrow{U}_2$

وإذا كتب المتجه بصيغة متجهي الوحدة فاننا نستطيع إيجاد الزوج المرتب الذي يمثله فمثلاً

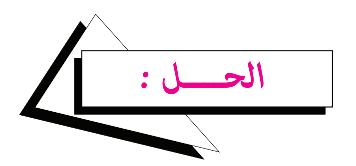
إذا كان $\overrightarrow{A} = 4\overrightarrow{U}_1 + 5\overrightarrow{U}_2$ فان $\overrightarrow{A} = (4,5)$

$\overrightarrow{B} = -2\overrightarrow{U}_1 + 3\overrightarrow{U}_2$ فان $\overrightarrow{B} = (-2, 3)$ وهكذا.



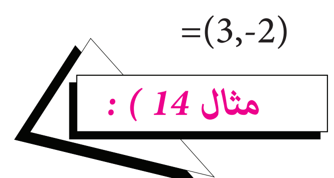
مثال (13) :

إذا كان $\overrightarrow{B} = 2\overrightarrow{U}_1 + \overrightarrow{U}_2$ ، $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{U}_1 - 3\overrightarrow{U}_2$ جد $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$



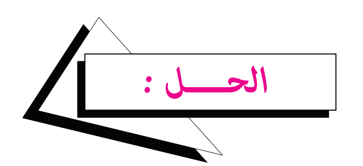
الحـــل :

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (\overrightarrow{U}_1 - 3\overrightarrow{U}_2) + (2\overrightarrow{U}_1 + \overrightarrow{U}_2) = \overrightarrow{U}_1(1+2) + \overrightarrow{U}_2(-3+1) = 3\overrightarrow{U}_1 - 2\overrightarrow{U}_2$$
$$=(3,-2)$$



مثال (14) :

إذا كان $\overrightarrow{A} = (5, -3)$ وكان $\overrightarrow{B} = (-3,4)$ وكان $L = 3$ ، $K = 2$ جد $K\overrightarrow{A} - L\overrightarrow{B}$ ثم عبر عنه بدلالة متجهي الوحدة .



الحـــل :

$$K\overrightarrow{A} - L\overrightarrow{B} = 2(5, -3) - 3(-3, 4)$$
$$= (10,-6) + (9, -12)$$
$$= (19, -18)$$
$$= 19\overrightarrow{U}_1 - 18\overrightarrow{U}_2$$

تمرينات (2 - 5)

س1 /

جد مقدار واتجاه كلّ من المتجهات الآتية موضحاً بالرسم :

$(-2\ ,\ -2)$ ، $(3,\ 0)$ ، $\sqrt{3}\ \vec{U}_1 + \vec{U}_2$ ، $-\vec{U}_1 - 2\vec{U}_2$

س2 /

بسط مايأتي:

$4(1\ ,-1)$ ، $2(1\ ,\ -1)$ ، $-7(1,5)$ ، $3\ (2,-1\ )+ 4(-1\ ,\ 5)$، $7(3\vec{U}_1 + 2\vec{U}_2)$ ، $-4(2\vec{U}_1-\vec{U}_2)$

س3 /

عبرّ عن كل من المتجهات الآتية بواسطة متجهي الوحدة $\vec{U}_1$ ، $\vec{U}_2$:

$(-1\ ,4)$ ، $(-3\ ,\ -5)$ ، $(0\ ,\ -1)$ ، $(\ 5\ ,\ 3)$، $(2\ ,\ 0)$ ، $(2\ ,\ 3)$

س4 /

إذا كان $\vec{E} = (x\ ,\ y)$ حيث $x\ ،\ y \in R$ وكان $\vec{A}$ أي متجه بحيث

$\vec{A} + \vec{E} = \vec{E} + \vec{A} = \vec{A}$ برهن على أن $\vec{E} = (0\ ,\ 0)$

س5 /

إذا كان $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} = (0,0)$ أثبت أن $\vec{A} = -\vec{B}$

س6 /

إذا كان $\vec{A} = (\sqrt{3}\ ,\ 1)$ ، $\vec{B} = (\sqrt{2}\ ,\sqrt{3})$ ، $K = 3$ ، $L = -2$

فجد كلاً مما يأتي : $K\ \vec{A} + L\ \vec{B}$ ، $K\ \vec{A} - \vec{B}$ ، $K\ \vec{A} + \vec{B}$ ، $K\ \vec{A}$ ، $\vec{A} + \vec{B}$ ، $L\ \vec{A}$ ، $K\ \vec{B}$

، $(L + K)\ (\vec{A} + \vec{B})$ ، $(L + K)\ \vec{A}$ ، $K\ (\vec{A} + \vec{B})$ ، $K\ \vec{A} - L\ \vec{B}$

$K\ L\ (\ \vec{A} - \vec{B})$ ، $K\ (L\ \vec{A} + K\ \vec{B})$

س7 /

حل السؤال 6 بالتعبير عن كل متجه من المتجهات بواسطة متجهي الوحدة $\vec{U}_1$ ، $\vec{U}_2$

س8 /

عبرّ عن المتجهات الآتية بواسطة متجهي الوحدة $\vec{U}_1$ ، $\vec{U}_2$

(أ) متجه طوله 3 وإتجاهه $\frac{\pi}{3}$ ، (ب) متجه طوله 10 وإتجاهه $\frac{\pi}{6}$

(جـ) متجه طوله 5 وإتجاهه $\frac{\pi}{4}$ ، (د) متجه طوله $\frac{3}{4}$ وإتجاهه π

س9 /

إذا كان $\vec{A} = (5\ ,\ 2)$ ، $\vec{B} = (2\ ,-4)$ جد x بحيث : $2\vec{A} + 3x = 5\vec{B}$.

الفصل السادس : الهندسة الاحداثية

6

[6-1] النظام الاحداثي .
[6-2] المسافة بين نقطتين معلومتين .
[6-3] احداثيات نقطة تقسيم مستقيم معلوم (من الداخل) .
[6-4] ميل المستقيم .
[6-5] شرط التوازي .
[6-6] شرط التعامد .
[6-7] معادلة المستقيم .
[6-8] بُعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم .

الاهداف السلوكية

يهدف هذا الفصل في دراسته بان يكون الطالب قادراً على ان:

- يتعرف على النظام الاحداثي
- يوجد البعد بين نقطتين في المستوى الاحداثي
- يوجد احداثي منتصف قطعة مستقيمة
- يوجد احداثي نقطة تقسيم قطعة مستقيمة
- يتعرف على معادلة من الدرجة الاولى بمتغيرين
- يتعرف على ميل المستقيم
- يوجد معادلة من الدرجة الاولى بمتغيرين
- يميز بين المستقيمان المتوازيان والمتعامدان من خلال ميولهما
- يوجد بُعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم

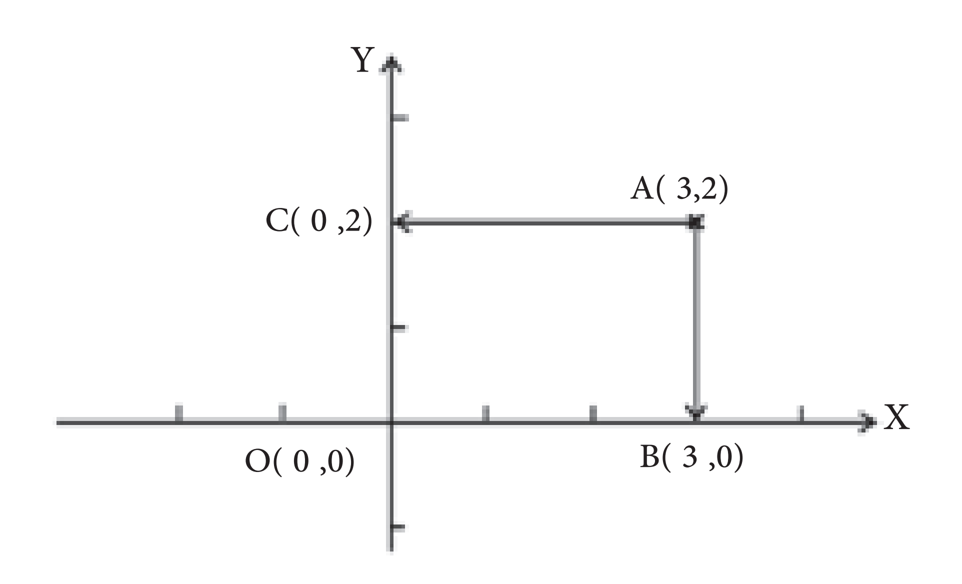
المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
المسافة بين نقطتين	$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
احداثيات نقطة تقسيم نسبته $\frac{n_1}{n_2}$	$\left(\frac{n_1x_2+n_2x_1}{n_1+n_2}, \frac{n_1y_2+n_2y_1}{n_1+n_2}\right)$
توازي المستقيمين L_1, L_2	$\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} \Longleftrightarrow m_1 = m_2$
تعامد المستقيمين L_1, L_2	$\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \Longleftrightarrow m_1 \times m_2 = -1$
معادلة المستقيم	$ax + by + c = 0$
المسافة بين نقطة ومستقيم D	$D = \frac{\lvert ax_1 + by_1 + c \rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$

[6-1] النظام الاحداثي في المستوي:

تعلم أنه إذا رسمنا في المستوي مستقيمين متعامدين $\overleftrightarrow{yy'}$، $\overleftrightarrow{xx'}$ ومتقاطعين في (O) ومثلنا الأعداد الحقيقية (R) على كل من هذين المستقيمين وافترضنا أنه O تمثل نقطة الأصل فاننا بذلك نكون قد أنشأنا نظاماً أحداثياً في المستوي ونسمي $\overleftrightarrow{xx'}$ محور السينات $\overleftrightarrow{yy'}$، محور الصادات وعندما نأخذ أية نقطة في هذا المستوي مثل A ونرسم منها عمودين الأول على محور السينات والآخر على محور الصادات وليكونا $\overline{AC}$ ، $\overline{AB}$ على الترتيب لاحظ الشكل (1 - 6)

وعندما نكتب (2 , 3) A عبارة عن زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يأتي الاحداثي السيني أولاً ثم الأحداثي الصادي.

في هذا الفصل سنعتبر ان محوري الاحداثيات متعامدان وأن وحدة الطول المستخدمة في تدريج أحد المحورين هي نفسها المستخدمة في تدريج المحور الآخر .



شكل (1 - 6)

[2 - 6] المسافة بين نقطتين معلومتين Distance Between Two Points:

إذا عرفنا إحداثي نقطتين تنتميان الى المستوي فان المسافة بينهما يمكن إيجادها بالطريقة الآتية:

لتكن $A(x_1 , y_1)$ ، $B(x_2 , y_2)$ نقطتين في المستوي:

ΔABC: قائم الزاوية في C

$L^2 = (AC)^2 + (BC)^2$ .... فيثاغورس

$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

قانون المسافة بين نقطتين.

أو بطريقة أخرى :

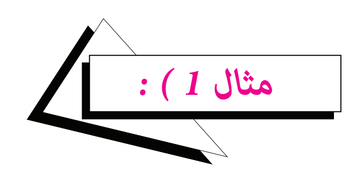
باستخدام الخاصية $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$

$\overrightarrow{AB} = (x_2 , y_2) - (x_1 , y_1)$

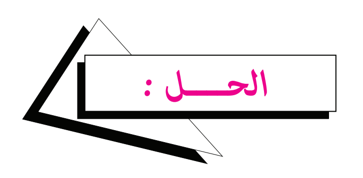
$= (x_2 - x_1 \text{ ، } y_2 - y_1)$

شكل (2 - 6)

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ..قانون المسافة بين نقطتين



أثبت أنه النقاط $A(-2 , 7)$ ، $B(-3, 4)$ ، $C(1, 16)$ تنتمي لمستقيم واحد.



الطريقة الأولى :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = (-3 , 4) - (-2, 7) = (-1 , -3)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = (1 , 16) - (-2 , 7) = (3 , 9) = -3(-1 , -3)$

$\therefore \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$

$\therefore$ A، B ، C تنتمي لمستقيم واحد.

الطريقة الثانية :

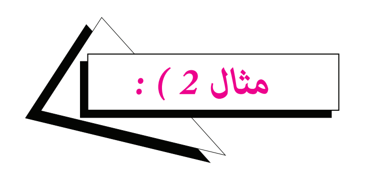
$AB = \sqrt{(-2+3)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$BC = \sqrt{(-3-1)^2 + (4-16)^2} = \sqrt{16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

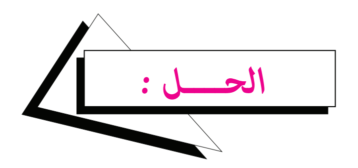
$AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (7-16)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

$BC = AB + AC$

A، B، C تنتمي لمستقيم واحد وإلاّ لكانت رؤوس مثلث إذ أن مجموع أي ضلعين في أي Δ أكبر من الضلع الثالث.



برهن أن الـ Δ الذي رؤوسه النقاط (1- , 5) C ، (2 , 2) B ، (1 , 1) A هو مثلث قائم الزاوية



$AB = \sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

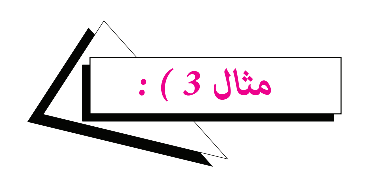
$AC = \sqrt{(5-1)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$BC = \sqrt{(5-2)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

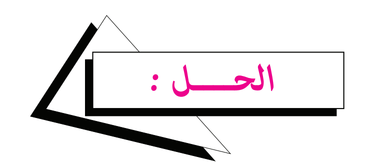
$\because$ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ لأن : $(\sqrt{20})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{18})^2$

أي أن $20 = 2 + 18$

$\therefore$ Δ ABC قائم في B .



بين أن النقاط A(-3, -1) ، B (1 , -4) ، C (10, -5) ، D (6 , -2) تمثل رؤوس متوازي أضلاع.



$$AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

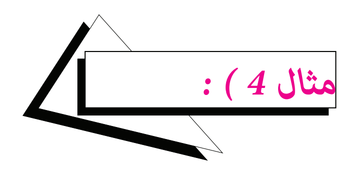
$$BC = \sqrt{(1-10)^2 + (-4+5)^2} = \sqrt{81+1} = \sqrt{82}$$

$$CD = \sqrt{(10-6)^2 + (-5+2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

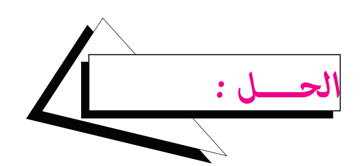
$$AD = \sqrt{(6+3)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{81+1} = \sqrt{82}$$

وحيث أن AB = CD ، BC = AD

الشكل ABCD يمثل متوازي أضلاع (لان كل ضلعين متقابلين متساويين).



اذا كانت النقط A (3, 2a) ، B (a,1) ، C(4, 1) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين فيه AB=AC جد قيمة $a \in R$.



معطى AB=AC

A (3 , 2a)

B (a,1) C (4,1)

$$\Rightarrow \sqrt{(3-a)^2 + (2a-1)^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (2a-1)^2}$$

بتربيع الطرفين

$$\Rightarrow (3-a)^2 + (2a-1)^2 = 1 + (2a-1)^2$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\Rightarrow (3-a)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 3-a = \pm 1$$

اما: $3-a = 1 \Rightarrow a = 2$

او: $3-a = -1 \Rightarrow a = 4$ تهمل (بين سبب ذلك)

تمرينات (1 - 6)

س1 /

جد المسافة بين كل زوج من النقاط الأتية:

أ) (3 , 4) ، (0 , 0).   ،   ب) (6 , 4) ، (1 , 2) .

جـ) (5 - , 3-) ، (5 , 1-)   ،   د) (1- , 4) ، (2- , 3).

س2 /

جد محيط المثلث الذي رؤوسه النقاط A(5 , 7) ، B(1, 10) ، C (-3 , -8).

س3 /

رؤوس شكل رباعي هي A(4 , -3) ، B(7 , 10) ، C (-8 ,2) ، D (-1 , -5) جد طول قطريه.

س4 /

أثبت أن النقاط A (3 , -2) ، B (-5 , 0) ، C (0 , -7) ، D (8 ,-9) هي رؤوس متوازي الاضلاع.

س5 /

إذا كانت A(-2 , 5) ،B (3 , 3) ،C (-4 , 2) ثلاث رؤوس من متوازي الاضلاع ABCD جد إحداثي نقطة D.

س6 /

بين أن المثلث الذي رؤوسه A (2 , 3) ، B (-1 , -1) ، C (3 , -4) هو مثلث متساوي الساقين.

س7 /

أثبت ان النقط (0 , 0) ، (6 , 8) ، (-3 , -4) تقع على استقامة واحدة.

[6-3] إحداثيات نقطة تقسيم معلوم (من الداخل) :

يقصد بتقسيم قطعة مستقيم من الداخل إيجاد احداثيات نقطة تقع بين نقطتي نهايتيها بحيث تقسمها بنسبة معلومة .

ولنفرض أن $A = (x_1 , y_1)$ ، $B = (x_2 , y_2)$

والمطلوب إيجاد C التي تقسم $\overline{AB}$ من الداخل

بنسبة $n_1 : n_2$ لذلك نقول : نفرض $C = (x , y)$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{AC}{CB}$$

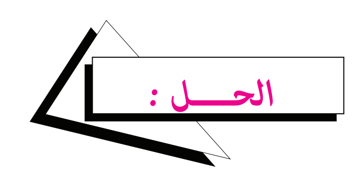
فان $Y = \dfrac{n_1y_2+n_2y_1}{n_1+n_2}$ كذلك $X = \dfrac{n_1x_2+n_2x_1}{n_1+n_2}$

نقطة التقسيم C $\left(\dfrac{n_1x_2+n_2x_1}{n_1+n_2} , \dfrac{n_1y_2+n_2y_1}{n_1+n_2} \right)$



جد إحداثيات النقطة التي تقسم قطعة المستقيم الواصلة بين النقطتين

$A (4 , -3)$ ، $B (-5, 0)$ بنسبة $\dfrac{1}{2}$



$$x = \frac{n_1x_2+n_2x_1}{n_1+n_2} = \frac{1(-5)+2(4)}{1+2} = \frac{-5+8}{3} = 1$$

$$y = \frac{n_1y_2+n_2y_1}{n_1+n_2} = \frac{1(0)+2(-3)}{1+2} = \frac{-6}{3} = -2$$

∴ إحداثيات نقطة التقسيم هي (2- , 1)



نقطة تنصيف القطعة المستقيمة :

نفرض M نقطة تنصيف القطعة المستقيمةAB

حيث $A(x_1 , y_1)$ ، $B((x_2 , y_2)$

فان

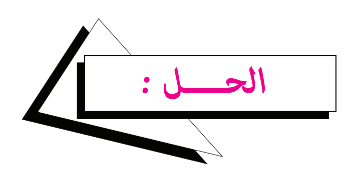
$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2} , \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$ نقطة المنتصف

وللاثبات إجعل $n_1 = n_2 = n$ وعوض في القانون السابق .



إذا كانت C منتصف $\overline{AB}$ حيث $A(-3 , 2)$ ، $B(7 , -8)$

جد إحداثيات النقطة C



$$C = \left(\frac{x_1+x_2}{2} , \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{-3+7}{2} , \frac{2+(-8)}{2}\right)$$

$$C = (2 , -3)$$

الخلاصة

النقطة $C(x,y)$ تقسم القطعة المستقيمة الواصلة بين $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ من الداخل بنسبة $\frac{n_1}{n_2}$ هي:

$$C\left(\frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2} , \frac{n_1 y_2 + n_2 y_1}{n_1 + n_2}\right)$$

احداثيات نقطة المنتصف هي: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

تمرينات (2 - 6)

س1 /

جد إحداثيات النقطة التي تقسم القطعة المستقيمة A B ، حيث $A (1 , 3)$ ، $B (4 , 6)$ بنسبة $\frac{2}{1}$.

س2 /

جد إحداثيات النقطة التي تنصف قطعة المستقيم AB حيث أن $A (2 , -4)$ ، $B (-3 , -6)$.

س3 /

جد إحداثيات النقطة C التي تقسم قطعة المستقيم AB بنسبة $\frac{3}{5}$ حيث أن $A (2 , 1)$ ، $B (1, -3)$

س4 /

جد إحداثيـــات النقطة C التي تبعد عن A ثلاثة أمثـــال بعدهـــــا عن B حيث $A(2 , 6)$ ، $B (4 , -4)$

س5 /

جد إحداثيات منتصفات أضلاع $\Delta A B C$ حيث: $A(4 , 0)$ ، $B (5 , 2)$ ، $C (2 , -3)$ ثم جد أطوال المستقيمات الواصله بين رؤوس المثلث ومنتصفات الاضلاع المقابلة.

س6 /

بين أن قطري الشكل الرباعي الذي رؤوسة $(-8 , -5)$ ، $(-3 , -3)$ ، $(1 , 3)$ ، $(-1 ,-2)$ ينصف أحدهما الآخر.

[6 - 4] مَيْل المستقيم Slope of The Line :

تعريف (1 - 6)

إذا كانت $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ فان

ميل المستقيم $AB = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ بشرط $x_2 \neq x_1$.

ملاحظة :

1) إذا كان $y_2 - y_1 = 0$ يعني أن ميل $\overleftrightarrow{AB}$ = صفراً

أي أن $\overleftrightarrow{AB}$ // محور السينات .

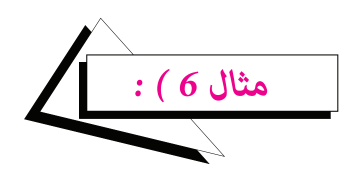
بمعنى أن ميل محور السينات = ميل كل مستقيم موازٍ لهُ = صفر.

2) إذا كان $x_2 - x_1 = 0$ يعني أن ميل $\overleftrightarrow{AB}$ غير معرف

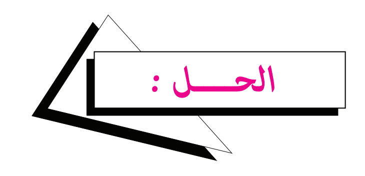
أي أن $\overleftrightarrow{AB}$ // محور الصادات.

بمعنى أن ميل محور الصادات = ميل كل مستقيم موازياً له ويكون غير معرف .

3) إذا كانت Q قياساً للزاوية الموجبة التي يصنعها $\overleftrightarrow{AB}$ مع الأتجاه الموجب لمحور السينات فان ميل $\overleftrightarrow{AB}$ يساوي tanQ حيث $Q \in [0, 180^\circ) / \{90^\circ\}$.



جد ميل المستقيم المار بالنقطتين$B(5, 1)$ ، $A(2, 3)$



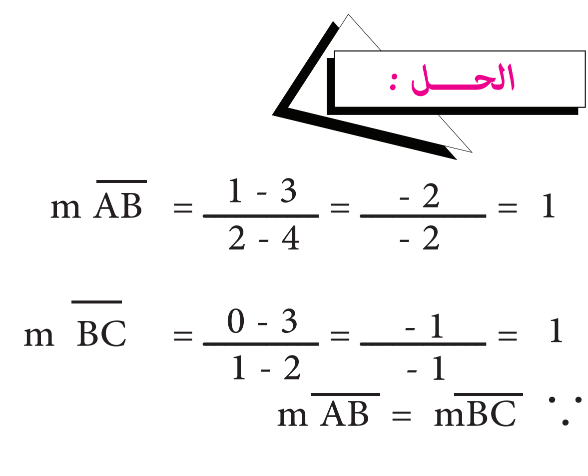
$$m\overleftrightarrow{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 3}{5 - 2} = \frac{-2}{3}$$

[6 - 5] شرط التوازي Parallel Condition :

المستقيمان المتوازيان لهما الميل نفسه وبالعكس ا ي $\overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_1}$ اذا وفقط اذا $m_1 = m_2$.



بين ان النقاط(C (1 , 0 ، B (2 , 1) ، A(4 , 3) تنتمي لمستقيم واحد .



$$m\,\overline{AB} = \frac{1 - 3}{2 - 4} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$m\,\overline{BC} = \frac{0 - 3}{1 - 2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\because \quad m\,\overline{AB} = m\overline{BC}$$

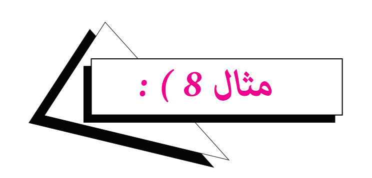
$\therefore$ A ، B ، C تنتمي لمستقيم واحد .

[6 - 6] شرط التعامد Perpendicular Condition :

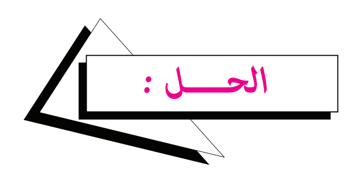
إذا تعامد مستقيمان فان حاصل ضرب ميلاهما = 1- وبالعكس أي $\overleftrightarrow{L_2} \perp \overleftrightarrow{L_1}$ اذا وفقط اذا

$$m_1 \times m_2 = -1$$

او $m_1 = \frac{-1}{m_2}$ ا ي ميل أحدهما يساوي مقلوب الآخر بعكس الاشارة مَثلاً إذا كان ميل مستقيم يساوي $\frac{-3}{4}$ فاي مستقيم يوازيه يكون ميله = $\frac{-3}{4}$ وأي مستقيم عمود عليه يكـون ميله = $\frac{4}{3}$.



برهن باستخدام الميل أن المثلث الذي رؤوسه A (3 , -1) ، B (10, 4) ، C (5 , 11) هو قائم الزاوية في B ؟

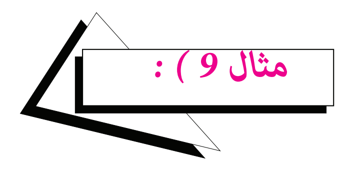


$$m\overline{AB} = \frac{4-(-1)}{10-3} = \frac{5}{7} \quad , \quad m\overline{BC} = \frac{11-4}{5-10} = \frac{7}{-5}$$

$$\therefore \quad m\overline{AB} \times m\overline{BC} = \frac{5}{7} \times \frac{7}{-5} = -1$$

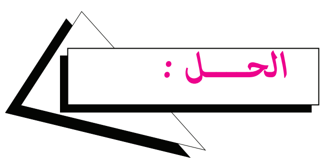
$$\therefore \quad \overline{AB} \perp \overline{BC}$$

$\therefore$ Δ ABC قائم الزاوية في B .



اذا كانت النقط A (0 , b) ، B (-1, 2) ، C (-2 , b-4) على استقامة واحدة جد قيمة


$. \ b \in R$



$\therefore$ A,B,C على استقامة واحدة

$$\Rightarrow m\overline{AB} = m\overline{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{2-b}{-1-o} = \frac{(b-4)-2}{-2-1}$$

$$\frac{2-b}{-1} = \frac{b-6}{-1} \Rightarrow 2-b = b-6$$

$$\Rightarrow b = 4$$

ملاحظة :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

تمرينات (3 - 6)

س1 /

(1) جد ميل المستقيم المار بالنقطتين (0 , 2) ، (2- , 0).

(2) بين أن النقاط ، (6 , 7-) ، (4 , 1-) , (3 , 2) على إستقامة واحدة.

(3) إذا كانت(h , 3-) B ، (3 , 2)A جد قيمة h بحيث يكون $m\,\overline{AB} = \frac{1}{2}$

(4) ABC مثلث رؤوسه (2- , 7) C ، (8- , 2-) B ، (6 , 1)A

جد ميل المستقيم المتوسط للمثلث ABC المار من B .

س2 /

لكل فقرةً فيما يأتي أربع إجابات واحدة فقط منها صحيحة ، حدد الاجابة الصحيحة لكل فقرةً :

1) إذا كان $\overleftrightarrow{H} \perp \overleftrightarrow{L}$ ، $\overleftrightarrow{H}$ يمر بالنقطتين (3 , 2) ، (5 , 1) فان ميل $\overleftrightarrow{L}$ يساوي

أ) $\frac{1}{2}$ ، ب) 2- ، جـ) $\frac{2}{3}$ ، د) $\frac{-2}{3}$

2) إذا كان $\overleftrightarrow{H} \,//\, \overleftrightarrow{L}$ ، $\overleftrightarrow{H}$ يمر بالنقطتين (2- , 3) ، (2 , 3-) فان ميل $\overleftrightarrow{L}$ يساوي

أ) $\frac{3}{2}$ ، ب) $\frac{-3}{2}$ ، جـ) $\frac{2}{3}$ ، د) $\frac{-2}{3}$

3) اذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{H} \,//\, \overleftrightarrow{L}$ ، $(-1 , 5) ، (-1 , 3) \in \overleftrightarrow{L}$ ، $(x , 6) ، (3 , 4) \in \overleftrightarrow{H}$ فان

قيمة x يساوي أ) 3- ، ب) 3 ، جـ) 1 د) ليس اياً مما سبق صحيح.

س3 /

1) باستخدام الميل بين ان النقاط $A(5, 2)$ ، $B(-2, 1)$، $C(2, -2)$ هي رؤوس Δ قائم الزاوية.

2) لتكن $A(-1, 5)$، $B(5, 1)$، $C(6, -2)$، $D(0, 2)$ بين ان الشكل ABCD متوازي اضلاع.

3) لتكن $A(5, 2)$، $B(2, -1)$، $C(-1, 2)$، $D(2, 5)$ بين ان الشكل ABCD مربع.

4) ABC مثلث رؤوسه $A(2, 4)$ ، $B(6, 0)$، $C(-2, -3)$ جد:

أ) ميل العمود المرسوم من A على $\overline{BC}$.

ب) ميل المستقيم المرسوم من B وموازياً $\overline{AC}$.

5) بين ان الشكل الرباعي الذي رؤوسه $A(-2, 2)$ ، $B(2, -2)$ ، $C(4, 2)$ ، $D(2, 4)$ يمثل شبه منحرف متعامد القطرين.

6) جد قيمة x التي تجعل المستقيم المار بالنقطتين $(-2, -9)$، $(x, 4)$ عموداً على المستقيم المار بالنقطتين $(3, 0)$ ، $(4, 1)$.

[6-7] معادلة المستقيم : Equation of The Line

اذا كانت (x , y) اية نقطة من نقاط أي مستقيم فان العلاقة بين x ، y تسمى معادلة ذلك المستقيم .

والمعادلة القياسية العامة للمستقيم هي: $a x + b y + c = 0$

1. المستقيم الذي يقطع المحورين يمكن تمثيله بيانياً بوضع $x = 0$

$\therefore \quad y = \frac{-c}{b}$

بوضع $y = 0 \Longleftarrow x = \frac{-c}{a}$

2. وعندما يكون $b = 0$ يكون $ax + c = 0$ تمثل معادلة مستقيم يوازي المحور الصادي ومنها $x = 0$ تمثل معادلة المحور الصادي.

3. وعندما يكون $a = 0$ يكون $b y + c = 0$ تمثل معادلة مستقيم يوازي المحور السيني ومنها $y = 0$ تمثل معادلة المحور السيني.

4. وعندما يكون $c = 0$ يكون $ax + by = 0$ تمثل معادلة مستقيم يمر من نقطة الأصل.

كيفية ايجاد معادلة المستقيم :

1. اذا علمت منه نقطتان:

معادلة المستقيم AB حيث $B(x_2, y_2)$ ، $A(x_1, y_1)$:

لتكن $\overleftrightarrow{AB} \ni C(x, y)$ فان:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

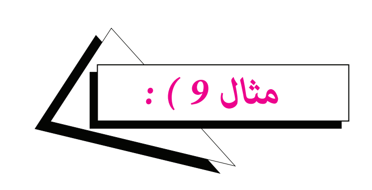
قانون إيجاد معادلة المستقيم بدلالة نقطتين.

2. اذا علمت منه نقطة وميل:

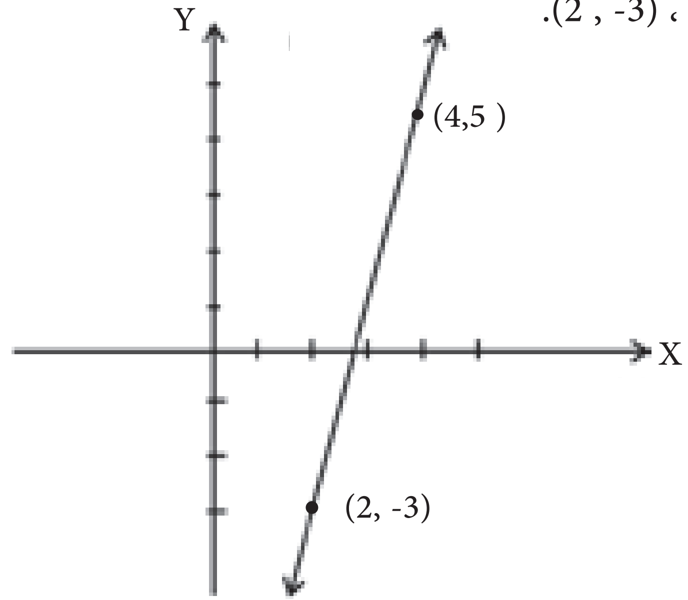
من القانون السابق $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

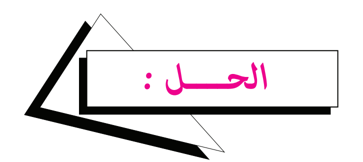
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

.... قانون إيجاد معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل .



جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (5 , 4) ، (3- , 2).





$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y + 3}{x - 2} = \frac{5 + 3}{4 - 2}$$

$$\frac{y + 3}{x - 2} = \frac{4}{1}$$

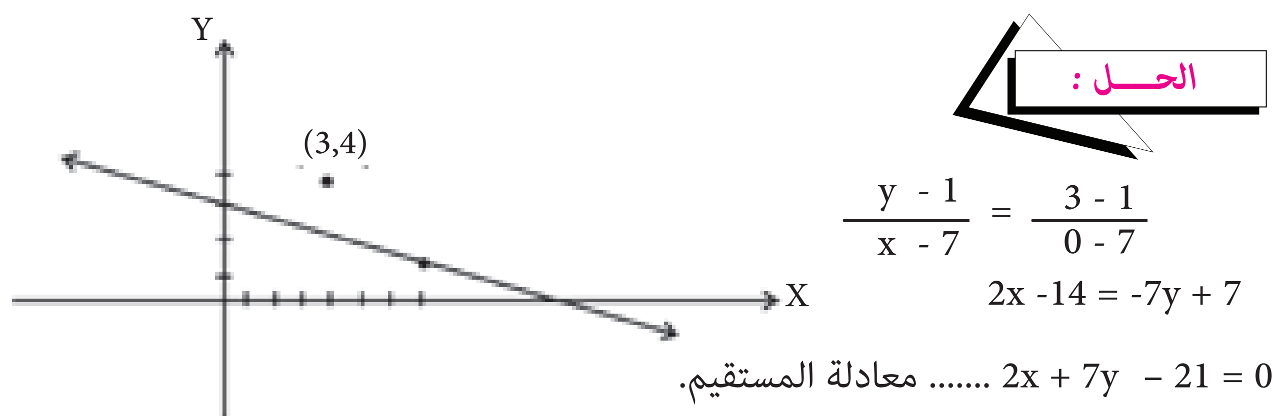
$$y+3 = 4x - 8$$

$\therefore$ $4x - y - 11 = 0$ .... معادلة المستقيم.



جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (0,3)، (7,1)، وهل ان النقطة (4 , 3) تنتمي اليه ام لا؟





$$\frac{y - 1}{x - 7} = \frac{3 - 1}{0 - 7}$$

$$2x - 14 = -7y + 7$$

$2x + 7y - 21 = 0$ .... معادلة المستقيم.

لكي نتأكد ان (3, 4) تنتمي للمستقيم ام لا، نعوض عن $y = 4$ ، $x = 3$ في معادلة المستقيم .

$$2(3) + 7(4) - 21 \overset{?}{=} 0$$

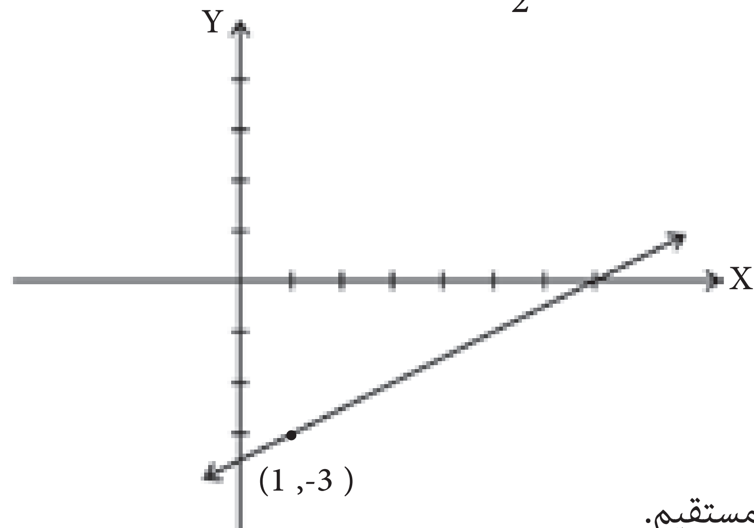
$$6 + 28 - 21 \overset{?}{=} 0$$

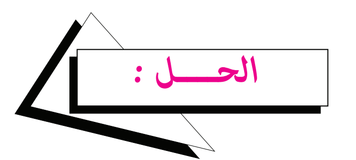
$\therefore \quad 13 \neq 0$

$\therefore$ النقطة (3, 4) لاتنتمي للمستقيم .



جد معادلة المستقيم المار من النقطة (3- , 1) وميله $\frac{1}{2}$.





$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

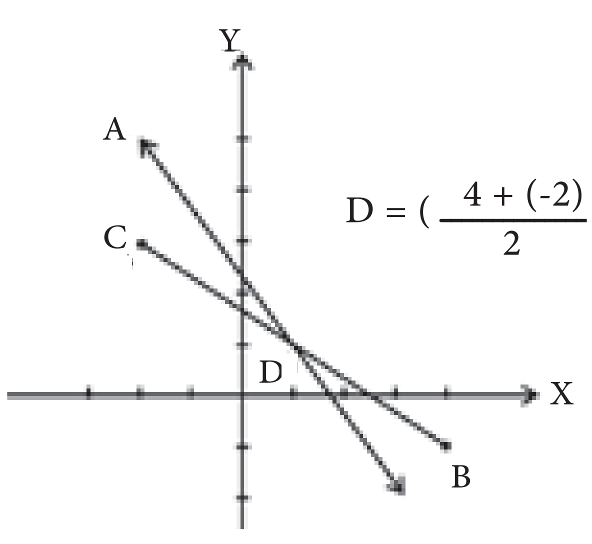
$$y + 3 = \frac{1}{2}\,(x - 1\,)$$

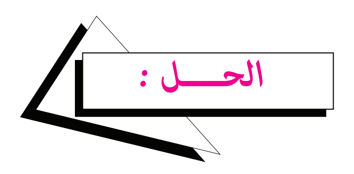
$$2y + 6 = x - 1$$

$x - 2\,y - \ 7 = 0$ .... معادلة المستقيم.



جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة(A(-2 , 5 ونقطة تنصيف القطعة المستقيمة التي نهايتاها النقطتان (B (4, -1)، C (-2 ,3 .



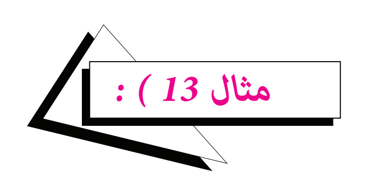


لتكن D منتصف $\overline{BC} \Leftarrow D = \left(\frac{4 + (-2)}{2}\,,\,\frac{-1 + 3}{2}\right) = (1,1)$

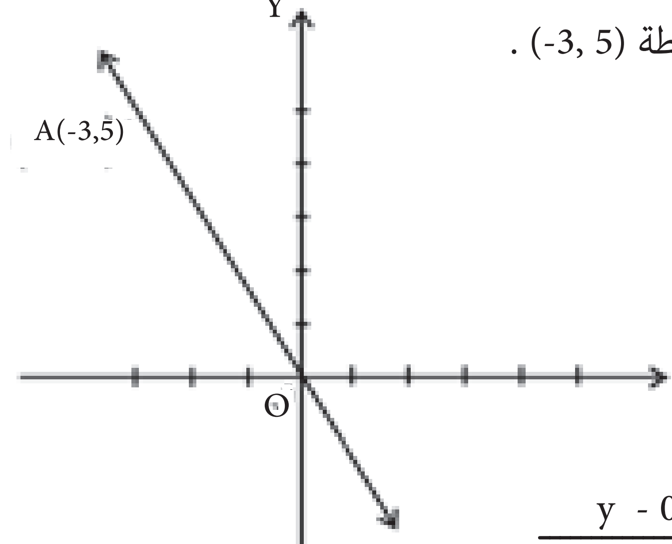
معادلة $\overleftrightarrow{AD}$ هي : $\frac{y\ - 5}{x\ + 2} = \frac{1 - 5}{1 + 2}$

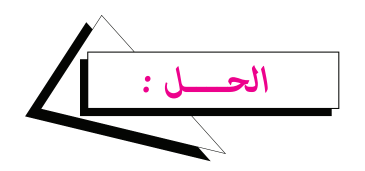
$$\therefore \quad 3y - 15 = -4x - 8$$

$4x + 3\,y - 7 = 0$ .... معادلة المستقيم.



جد معادلة المستقيم المار بنقطة الاصل والنقطة (5 ,3-) .





$A(-3,5)$ ، $O(0,0)$.

معادلة المستقيم OA هي : $\frac{5-0}{-3-0} = \frac{y-0}{x-0}$

$\frac{5}{-3} = \frac{y}{x}$

$5x + 3y = 0$ .... معادلة المستقيم .



يمكن ايجاد ميل المستقيم من معادلته:

نفرض ان معادلة المستقيم: $ax + by + c = 0$

ميل المستقيم = $\frac{\text{-معامل } x}{\text{معامل } y}$ بعكس الاشارة بشرط y ، x في طرف واحد من المعادلة

وان $b \neq 0$

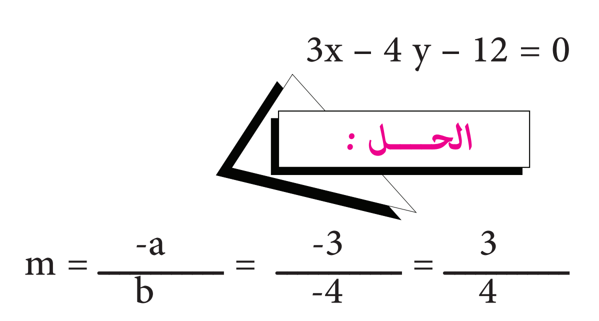
∴ ميل المستقيم = - $\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$

اي ميل المستقيم = $\frac{-a}{b}$



جد الميل والمقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته:

$$3x - 4y - 12 = 0$$



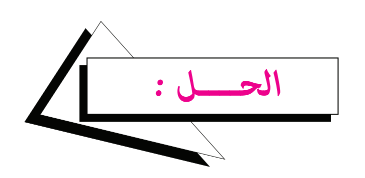
$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

المقطع الصادي: نعوض عن $x = 0$

فيكون : $-4y - 12 = 0 \Rightarrow y = -3$



جد معادلة المستقيم الذي يصنع من الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 150° ويمر بالنقطة $(1 ,-4)$.



ميل المستقيم $m = \tan 150^\circ$

$$= \tan (180^\circ - 30^\circ)$$

$$= -\tan 30^\circ$$

$$m = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\because y - y_1 = m (x - x_1)$$

$$\therefore y + 4 = \frac{-1}{\sqrt{3}} (x - 1)$$

$x + \sqrt{3}\,y + 4\sqrt{3} - 1 = 0$ .... معادلة المستقيم .



جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة (2,1-) وعمودياً على المستقيم الذي معادلته

$2x - 3y - 7 = 0$

الحـــل :

من المستقيم $2x - 3y - 7 = 0$

∴ ميل المستقيم : $m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-3}{2}$ (لانه عمودياً عليه) .

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = \frac{-3}{2}(x + 2)$

$3x + 2y + 4 = 0$ ...... معادلة المستقيم المطلوب

الخلاصة

1) ميل المستقيم المار بالنقطتين $(x_2,y_2),(x_1,y_1)$ هو $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

2) ميل المستقيم $ax+by+c=0$ هو $m=\frac{-a}{b}$

3) ميل المستقيم الذي يصنع الزاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو $m = \tan\theta$

4) معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(x_2,y_2),(x_1,y_1)$ هو $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

5) معادلة المستقيم المار بالنقطة (x_1,y_1) وميل m هو $y-y_1=m(x-x_1)$



تمرينات (4 - 6)

س1 /

1.جد معادلة المستقيم الذي ميله = $\frac{-1}{2}$ ويمر بالنقطة (0 , 4 -) .

2.جد معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (1- , 2) .

3.جد معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (1- , 2) .

4.جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (3 ,1-)، (5 ,1-) .

5.جد معادلة المستقيم L المار بالنقطة (1- ,2) والموازي الى $\overleftrightarrow{L_1}$ الذي ميله = $\frac{2}{3}$.

6.جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (2- ,0) وعمودياً على المستقيم الذي ميله = $\frac{-3}{5}$.

7.جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (4- , 3) وعمودياً على المستقيم المار بالنقطتين (2- ,2)، (3, 0)

8.لتكن A (4,-2)، B (1, 2) جد معادلة المستقيم العمود الذي ينصف $\overline{AB}$

س2 /

1.جد معادلة المستقيم الذي ميله = 3- ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله 7 وحدات

2.جد معادلة المستقيم الذي ميله = 2 ويقطع جزءاً سالباً من محور السينات طوله 6 وحدات

3.جد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات لكل مستقيم فيما ياتي:

أ . $\overleftrightarrow{L_1}: 2x - 3y + 5 = 0$

ب . $\overleftrightarrow{L_2}: 8y = 4x + 16$

جـ . $\overleftrightarrow{L_3}: 3y = -4$

4.جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (5- , 2) ويوازي المستقيم الذي معادلته :

$2x - y + 3 = 0$

5.جد معادلة المستقيم L الذي يقطع جزءاً سالباً من محور الصادات طوله 4 وحدات وعمودياً على المستقيم $2y = 4x - 1$.

6.ليكن $\overleftrightarrow{L}$ مستقيماً معادلته: $x + y - 2 = 0$ جد ميله ونقطة تقاطعه مع محور الصادات ثم ارسم $\overleftrightarrow{L}$

7.جد معادلة المستقيم L المار بالنقطة $(2, -2)$ وعمودياً على المستقيم الذي معادلته

$x + y = 0$ ثم جد نقطة تقاطع المستقيم L مع المحورين الاحداثيين.

8.المستقيم $\overleftrightarrow{L} : 2x - y = 3$ و المستقيم $\overleftrightarrow{H} : 3x + 6y = -3$

أ. بين ان $\overleftrightarrow{H} \perp \overleftrightarrow{L}$

ب. جد جبرياً نقطة تقاطع المستقيمين H ، L .

9. جد معادلة المستقيم الذي يصنع $135°$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات والمار بنقطة الاصل.

10. المستقيم $L : 2y = ax + 1$ يمر بالنقطة$(1, 2)$ جد :

أ) قيمة $a \in R$

ب) ميل المستقيم L

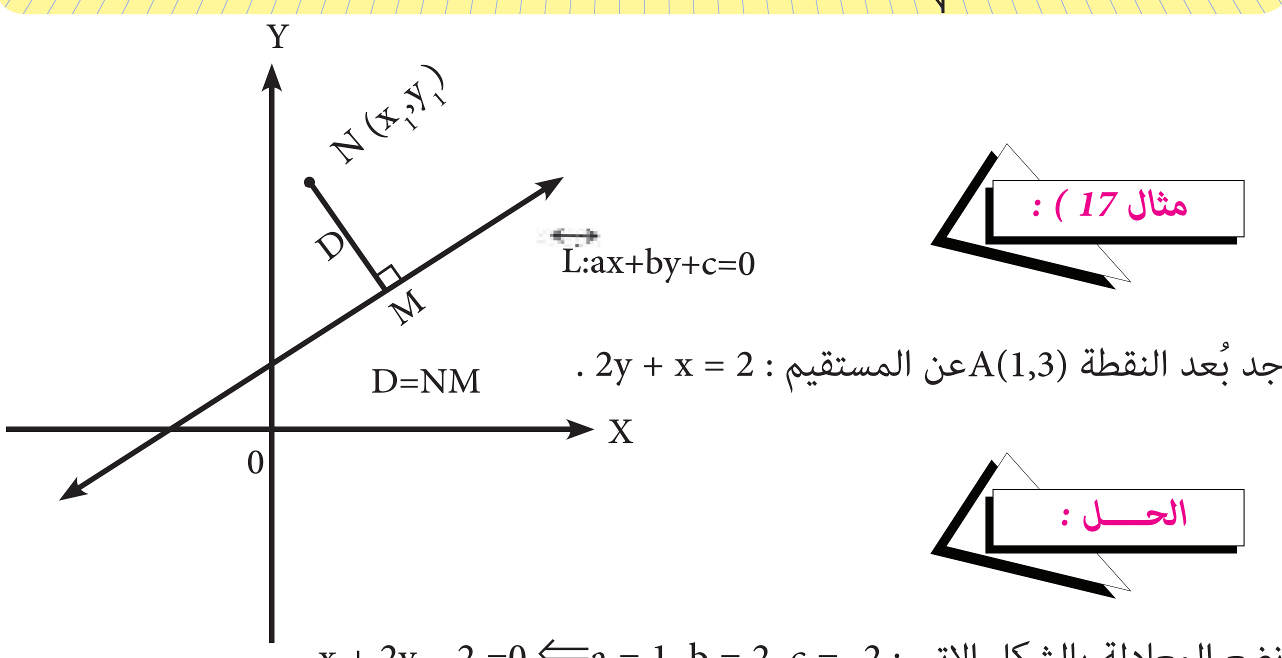
جـ) مقطعه الصادي

[8 - 6] بعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم

تعريف (6 - 2)

اذا كان المستقيم $L: ax + by + c = 0$ والنقطة $N(x_1, y_1)$ معلومة فيعرف بعد النقطة N عن المستقيم L بانه المسافة العمودية (D) بين النقطة N والمستقيم L وتعطى بالعلاقة الاتية :

$$D = \frac{|a x_1 + b y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ ... قانون البعد



مثال (17) :

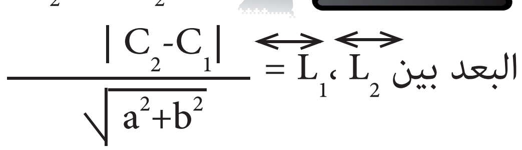
جد بُعد النقطة $A(1,3)$ عن المستقيم : $2y + x = 2$.

الحــــل :

نضع المعادلة بالشكل الاتي : $a = 1, b = 2, c = -2 \Leftarrow x + 2y - 2 = 0$

$$= \frac{|a x_1 + b y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(1)(1)+(2)(3)-2|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}$$

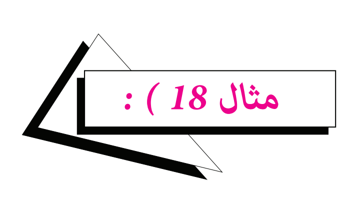
$$D = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ unit}$$

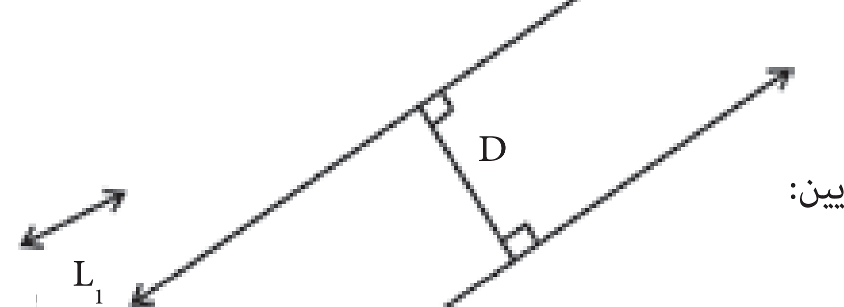


يمكن ايجاد البعد بين المستقيمين المتوازيين

$\overleftrightarrow{L_1}: a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ ، $\overleftrightarrow{L_2}: a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ حيث :

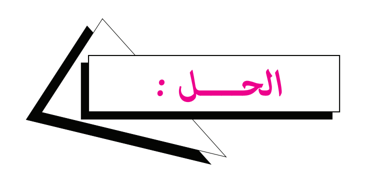
البعد بين $\overleftrightarrow{L_1}$ ، $\overleftrightarrow{L_2}$ = $\frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$





جد البعد بين المستقيمين المتوازيين:

$\overleftrightarrow{L_1}: x - 3y = 1$ ، $\overleftrightarrow{L_2}: x - 3y = 4$



البعد بين مستقيمين متوازيين هو بعد أي نقطة تنتمي لأحدهما عن الآخر .

لذا في: $\overleftrightarrow{L_1}: y = 0 \Rightarrow x = 1$

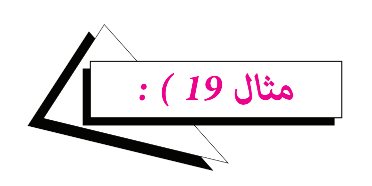
$\therefore$ النقطة $(1, 0)$

$$\therefore \quad D = \frac{|a x_1 + b y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

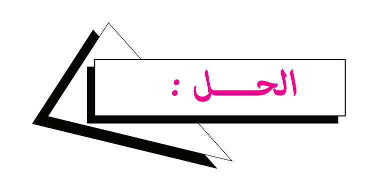
$$D = \frac{|(1)(1) - 3(0) - 4|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

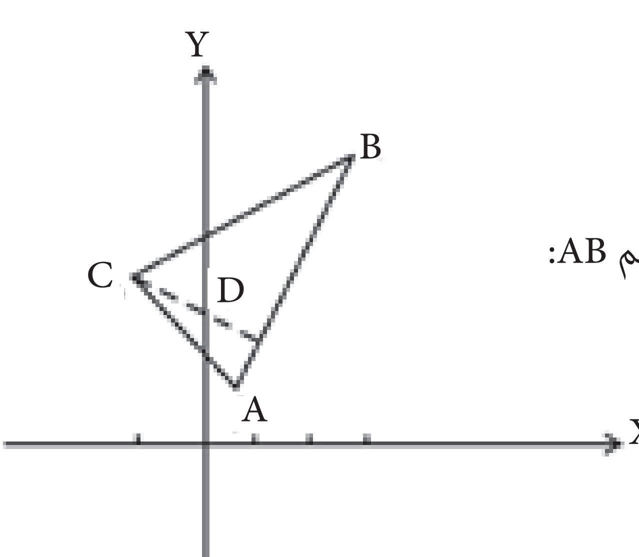
حل آخر حسب النتيجة :

$$D = \frac{|4-1|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$



جد مساحة الـمثلث الذي رؤوسه النقاط A (1,2) ، B (3 ,5) ، C (-1 ,3)





نجد معادلة احد اضلاع المثلث وليكن المستقيم AB:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{5 - 2}{3 - 1} \Rightarrow \frac{y - 2}{x - 1} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore\ 3x - 2y + 1 = 0$$

الآن بعد النقطة (1,3-) C عن المستقيم AB يمثل ارتفاع Δ ABC

$$D = \frac{|\,3(-1) - 2(3) + 1\,|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{8}{\sqrt{13}} \text{ unit}$$

نجد طول $AB = \sqrt{(3-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$$\text{Area } \Delta = \frac{1}{2}(AB) \cdot D$$

$$= \frac{1}{2} \times (\sqrt{13}) \cdot \frac{8}{\sqrt{13}} = 4 \text{ unit}^2$$

تمرينات (5 - 6)

س1 /

ضع علامة (✓) اذا كانت العبارة صائبة وعلامة (×) اذا كانت العبارة خاطئة فيما يأتي :

1. بعد نقطة الاصل عن المستقيم: $y = 3$ هو 3 وحدات.

2. بعد نقطة الاصل عن المستقيم: $y = -5$ هو 5 وحدات.

3. بعد نقطة الاصل عن المستقيم: $x = -5$ هو 5 وحدات.

4. البعد بين المستقيمين المتوازيين: $y = -1$، $y = 4$ هو 3 وحدات.

س2 /

1.جد بعد النقطة $(1, -2)$ عن المستقيم: $6x + 8y - 21 = 0$

2.جد بعد نقطة الاصل عن المستقيم الذي ميله = $\frac{1}{3}$ ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله 4 وحدات.

3.جد البعد بين المستقيمين المتوازيين:

$$\overleftrightarrow{L_1}: 8x - 6y + 4 = 0$$

$$\overleftrightarrow{L_2}: 4x - 3y - 1 = 0$$

4.جد بعد النقطة $(-2, 0)$ عن المستقيم المار بالنقطتين $A(1,-1)$، $B(3, 5)$.

5.جد مساحة المثلث ABC حيث $A(-4, 6)$، $B(-3, -1)$، $C(5, -2)$.

7 الفصل السابع : الإحصاء Statistics

[7-1] مقاييس النزعة المركزية .

[7-2] الوسط الحسابي .

[7-3] الوسيط .

[7-4] المنوال .

[7-5] مقاييس التشتت .

الاهداف السلوكية

- ان من اهم الاهداف السلوكية التي يهدف اليها تدريس الاحصاء:
- يتعرف على معنى الوسط الحسابي
- يتمكن من ايجاد الوسط الحسابي
- يتعرف على الوسيط
- يتمكن من ايجاد الوسيط
- يتعرف على المنوال
- يتمكن من ايجاد المنوال
- يتعرف على الانحراف المعياري
- يتمكن من ايجاد الانحراف المعياري
- يتعرف على معامل الارتباط
- يتمكن من ايجاد معامل الارتباط

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
الوسط الحسابي	$\overline{X}$
الوسيط	ME
المنوال	MO
المدى	R
الانحراف المعياري	S
معامل الارتباط	r

[1 - 7] مقاييس النزعة المركزية *Measures of Central Tendency* :

اخذنا في المراحل الدراسية السابقة طرائق جمع البيانات وعرضها جدولياً وبيانياً والان نريد ان نبحث عن مقياس يكون معبراً عن الظاهرة موضوع الدراسة وممثلاً لها، أي نريد الحصول على قيمة واحدة تعبر عن جميع القيم. فمتوسط الدخل مثلاً في بلد يعبر عن جميع الدخول في هذا البلد أي يعبر عن المستوى العام للدخل.

ومن خصائص البيانات، ان لها نزعة او ميلاً لانها تتركز حول قيمة معينة متوسطة وهذه القيم التي تتركز حولها البيانات تسمى بالمتوسطات او مقاييس النزعة المركزية.

وسوف نتناول اهم مقاييس النزعة المركزية بشيء من التوسع بعد ان درستها في المرحلة المتوسطة بشكل بسيط وهي:

- الوسط الحسابي.
- الوسيط.
- المنوال.

وتختلف هذه المقاييس الثلاثة من حيث الفكرة وطريقة الحساب كما لكل منها مزاياه وعليه عيوبه. وتوجد بعض الحالات التي يستخدم فيها احد المقاييس من دون الاخر.

[7 - 2] الوسط الحسابي *Arithmatic Mean* :

تعريف (1 – 7)

يعرف الوسط الحسابي لمجموعة من القيم بانه القيمة التي لو حلت محل قيمة كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساوياً لمجموع القيم الاصلية.

وبالتالي فان الوسط الحسابي يساوي مجموع القيم على عددها .

طريقة حسابه :

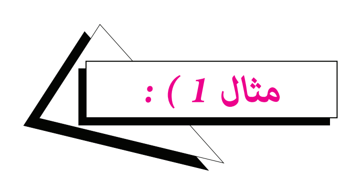
الطريقة الأولى

1) اذا كانت المعلومات الاحصائية (البيانات) غير مبوبة :

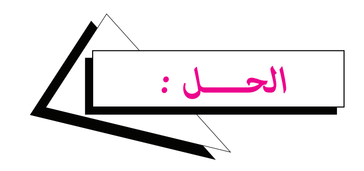
$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

وبالرموز :

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots\dots + x_n}{n}$$



اذا كانت اعمار خمسة اشخاص هي: 12,11,9,8,5 سنة احسب الوسط الحسابي لاعمار هؤلاء الاشخاص.



$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots\dots\dots + x_n}{n} = \frac{12 + 11 + 9 + 8 + 5}{5}$$

$$\frac{45}{5} = 9 \text{ سنوات}$$

2) اذا كانت البيانات مبوبة :

اذا كانت القيم الاحصائية متجمعة في توزيع تكراري فيمكن استخدام القانون الاتي:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع حاصل ضرب كل مركز فئة في تكرارها}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

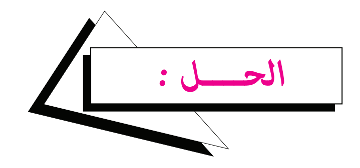
$$\overline{X} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots\dots\dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots\dots\dots + f_n}$$

مثال (2) :

لنفرض وجود (3) اشخاص عمر كل منهم 8 سنوات، و (5) اشخاص عمر كل منهم 9 سنوات، و (4) اشخاص عمر كل منهم 11 سنة، وشخصين عمركل منهم 12 سنة كما في الجدول الاتي:

العمر	8	9	11	12
عدد الاشخاص	3	5	4	2

(هذا الجدول من دون فئات) فيكون العدد (العمر) هو الذي يمثل مركز الفئة ، احسب الوسط الحسابي للعمر.


الحــــل :

اذا رمزنا للعمر بالرمز x ولعدد الاشخاص او التكرار بالرمز f فان خطوات الحــــل يمكن تبسيطها كما في الجدول التالي :

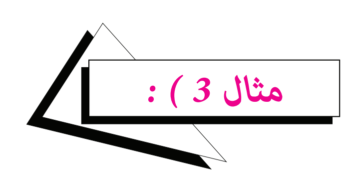
العمر (x)	التكرار (f)	التكرار × العمر (x f)
8	3	$8 \times 3 = 24$
9	5	$9 \times 5 = 45$
11	4	$11 \times 4 = 44$
12	2	$12 \times 2 = 24$
المجموع	14	137

$$\therefore \quad \overline{X} = \frac{137}{14}$$

$= 9.786$ سنة

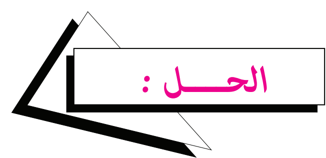
(الوسط الحسابي للعمر)

ولنتقدم خطوة اخرى وناخذ حالة الجداول التكرارية ذات الفئات .



الجدول التالي يبين توزيع مئة شخص حسب فئات الوزن بالكيلوغرام. والمطلوب حساب الوسط الحسابي للوزن ؟

فئات الوزن	30-	40-	50-	60-	70-	80-90	المجموع
عدد الاشخاص	9	15	22	25	18	11	100



نجد مركز الفئة (x) : مركز الفئة الأولى = $\frac{30 + 40}{2} = 35$

مركز الفئة الثانية = 35 + 10 = 45.......... وهكذا.

وبالتالي فان خطوات الحل هي :

1)حساب مراكز الفئات ونرمز لها (x).

2)نضرب مركز الفئة (x) في تكرارها (f)

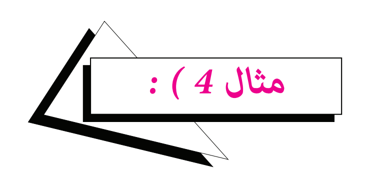
3)نجد الوسط الحسابي من العلاقة:

فئات الوزن	التكرار (f)	مراكز الفئات (x)	x × f
30-	9	35	315
40-	15	45	675
50-	22	55	1210
60-	25	65	1625
70-	18	75	1350
80- 90	11	85	935
المجموع	100		6110

$$\overline{X} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \dots\dots\dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots\dots + f_n}$$

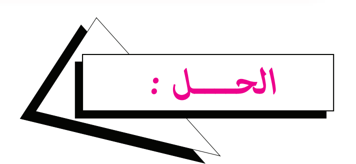
$$\overline{X} = \frac{6110}{100}$$

$\overline{X} = 61.1$ كيلو غرام



جد الوسط الحسابي من الجدول التكراري الاتي :

الفئات	8-	10-	12-	14-	16-	18-20	المجموع
التكرار	5	15	20	10	6	4	60



الفئات	التكرار (f)	مراكز الفئات (x)	x × f
8-	5	9	45
10-	15	11	165
12-	20	13	260
14-	10	15	150
16-	6	17	102
18- 20	4	19	76
المجموع	60		798

$$\overline{X} = \frac{798}{60}$$

$$\overline{X} = 13.3$$

الوسط الحسابي

الطريقة الثانية

طريقة الوسط الفرضي أو الانحرافات :

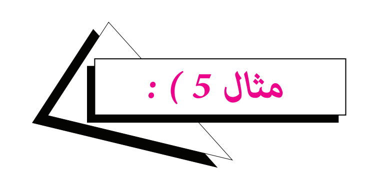
تعتمد هذه الطريقة على إختيار إحدى القيم (مراكز الفئات) بوصفها وسطاً فرضياً ثم إيجاد إنحراف كل فئة عن ذلك الوسط الفرضي ومن ثم نطبق القانون :

$$\text{الوسط الحسابي} = \text{الوسط الفرضي} + \frac{\text{مجموع (انحراف مركز فئة في تكرارها)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$\overline{X} = \overline{X}_0 + \frac{\Sigma f.E}{\Sigma f}$$

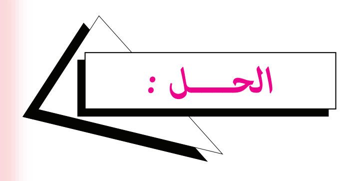
حيث $\overline{X}_0$ = الوسط الفرضي

f = تكرار الفئة ، $E = X-\overline{X}_0$ الانحراف ، Σf = مجموع التكرارات .



الجدول التكراري التالي يبين أعمار 100 طالب جامعي. أوجد الوسط الحسابي للأعمار بطريقة الوسط الفرضي؟

الاعمار	18	20	22	24	26	28-30	المجموع
عدد الطلاب	20	44	18	13	3	2	100



1) نستخرج مراكز الفئات.

2) نختار الوسط الفرضي ($\overline{X}_0$) من بين مراكز الفئات وليكن (21) الذي يقابل أكبر تكرار .

3) نستخرج أنحراف مركز كل فئة عن الوسط الفرضي (الانحراف = مركز الفئة - الوسط الفرضي). $E = X-\overline{X}_0$

4) نستخرج حاصل ضرب تكرار كل فئة (f) × انحراف مركزها عن الوسط الفرضي .

5) نستخرج المجموع الكلي للتكرارات والمجموع الكلي Σ (f.E)، نكتب المعلومات السابقة في جدول كالآتي:

الاعمار للفئات	عدد الطلاب التكرار (f)	مركز الفئة (X)	الانحراف $E = X-\overline{X}_0$	f.E
18-	20	19	19 - 21 = -2	20 × -2 = -40
20-	44	$21=\overline{X}_0$	21 - 21 = 0	44 × 0 = 0
22-	18	23	23 - 21 = 2	18 × 2 = 36
24-	13	25	25 - 21 = 4	13 × 4 = 52
26-	3	27	27 - 21 = 6	3 × 6 = 18
28- 30	2	29	29 - 21 = 8	2 × 8 = 16
المجموع	100			82

$$\overline{X} = \overline{X}_0 + \frac{\Sigma f.E}{\Sigma f}$$

$$\overline{X} = 21 + \frac{82}{100} = 21 + 0.82$$

$\overline{X} = 21.82$ الوسط الحسابي للاعمار

مزايا الوسط الحسابي وعيوبه :

المزايـا :

(1) يتميز بعملياته الحسابية البسيطة .

(2) تدخل جميع القيم في حسابه .

العيوب :

(1) يتأثر بالقيم الشاذة او المتطرفة الكبيرة جداً او الصغيرة جداً .

(2) لا يمكن حسابه حساباً بيانياً .

[7 - 3] الوسيط Median :

تعريف (7-2)

يعرف الوسيط لمجموعة من القيم بأنه القيمة التي تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً وبالتالي فان عدد القيم الأصغر منه يكون مساوياً للقيم الاكبر منه .

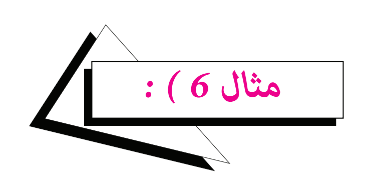
طريقة حساب الوسيط :

١) البيانات غير المبوبة :

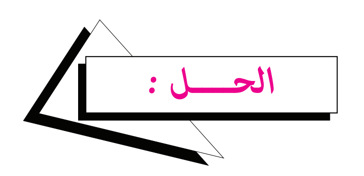
نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً ثم نأخذ القيمة التي تقع في المنتصف لتكون هي الوسيط.

هذا بفرض أن عدد القيم فردي .

أما إذا كان عدد القيم زوجياً فنأخذ القيمتين اللتين في المنتصف ويكون الوسيط هو مجموع القيمتين مقسوماً على اثنين.



احسب الوسيط لأوزان بعض الطلاب والتي هي : 52 كغم، 58كغم، 50كغم، 63 كغم، 55 كغم.

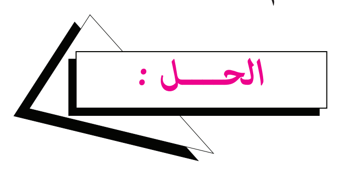


نرتب القيم تصاعديا: 63 ، 58، 55، 52، 50 نلاحظ أن القيمة التي في المنتصف هي الثالثة في الترتيب

∴ الوسيط =55



احسب الوسيط للأوزان التالية لبعض الطلاب: 52 كغم، 58كغم، 50كغم، 63 كغم، 57 كغم، 55كغم.



نرتب القيم تصاعدياً: 63، 58، 57 ، 55، 52، 50

نلاحظ وجود قيمتين في المنتصف ويكون

ترتيب الاول= $\frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (الثالث)

ترتيب الثاني= $\frac{n}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$ (الرابع)

∴ الوسيط= $\frac{\text{الثالث + الرابع}}{2} = \frac{57 + 55}{2} = 56$

2) في البيانات المبوبة :

يمكن حساب الوسيط في حالة البيانات المبوّبة ذات الفئات: وتكون خطوات الحل كما يأتي :

1) نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد من الجدول التكراري.

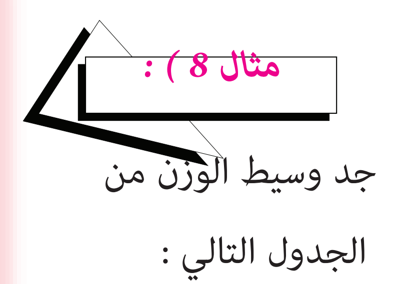
2) حساب ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموعة التكرار}}{2}$

3) تحديد الفئة التي تحتوي على الوسيط من الجدول التكراري المتجمع الصاعد وتسمى الفئة الوسطية وهي الفئة التي تقابل أول تكرار أكبر أو يساوي ترتيب الوسيط .

ترتيب الوسيط- التكرار المجتمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية

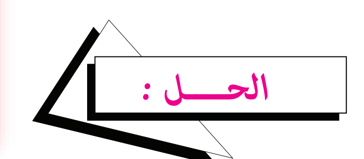
الوسيط = الحد الأدنى للفئة الوسيطيه + $\frac{\text{ترتيب الوسيط - التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}}$ × طول الفئة

$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - fb}{fm} . W$ حيث الوسيط = ME ، fb التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية ، fm : تكرار الفئة الوسيطية ، W:طول الفئة ، L: الحد الادنى للفئة الوسيطية .



جد وسيط الوزن من الجدول التالي :

فئات الوزن	التكرار عدد الاشخاص	التكرار المجتمع الصاعد
30-	9	9
40-	15	24
50-	22	46
60-	25	71
70-	18	89
80 - 90	11	100
المجموع	100	



ترتيب الوسيط = $\frac{100}{2} = 50$

∴ الفئة الوسيطية = (60 - 70)

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - fb}{fm} . W$$

$$ME = 60 + \frac{50 - 46}{25} \times 10$$

$$= 60 + \frac{8}{5} \quad \Longrightarrow \quad ME = 60 + 1.6 = 61.6$$

مزايا الوسيط وعيوبه :

المزايـا :

(1) لايتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة

(2) يمكن حسابه حساباً بيانياً.

العيوب :

(1) لاتدخل جميع القيم في حسابه.

(2) في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات يكون حسابه بالطرق التقريبية .

[7-4] المنوال Mode :

تعريف(3 - 7)

يُعَرّف المنوال لمجموعةمن القيم بأنه القيمة الأكثر تكراراً أو التي تقابل أكبر التكرارات. ويرمز لهMO

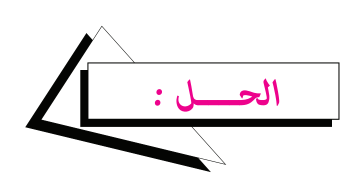
طريقة حساب المنوال :

1) البيانات غير البوّبة :



ما هي القيمة المنوالية لمجموعة الأعداد الآتية :

أ) 4، 7، 9، 4، 3، 8، 7، 4، 2، 4



المنوال = 4 لانها تكررت أكثر من غيرها .

ب) 6، 5، 1، 8، 6، 5، 10، 18

المنوال = 5، 6 لأنهما تكررا أكثر من غيرهما.

جـ) 8، 5، 4، 3، 7، 10، 11، 12

المنوال = لايوجد

2) البيانات المبوبة :

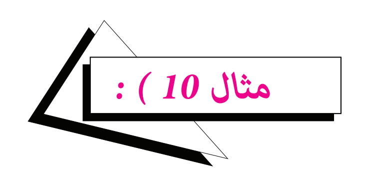
أ) طريقة الفروق (طريقة بيرسون) :

المنوال = الحد الادنى للفئة المنوالية + $\frac{d_1}{d_1 + d_2}$ × طول الفئة المنوالية

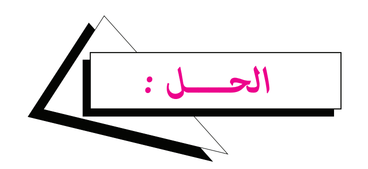
حيث d_1 = تكرار الفئة المنوالية - تكرار الفئة التي قبلها.

d_2 = تكرار الفئة المنوالية - تكرار الفئة التي بعدها.

وإن التكرار المنوالي هو أكبر تكرار في الجدول التكراري. والفئة المنوالية التي تقابل أكبر تكرار.



احسب المنوال من الجدول التالي :



فئات	التكرار	
30-	9	
40-	15	
50-	22	التكرار السابق ←
60-	25	التكرار المنوالي ←
70-	18	التكرار اللاحق ←
80-90	11	

$d_1 = 25 - 22 = 3$

$d_2 = 25 - 18 = 7$

طول الفئة المنوالية = 70 - 60 = 10

المنوال = الحد الادنى للفئة المنوالية + $\frac{d1}{d1+ d2}$×طول الفئة

المنوال = 60 + $\frac{3}{3 + 7}$ × 10

المنوال = 60 + 3

المنوال = 63

ب) طريقة العزوم (الرافعة) :

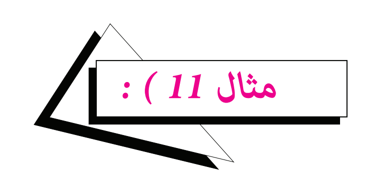
1) في هذه الطريقة نرسم عتلة ونجعل تكرار الفئة المنوالية قوة تؤثر عند إحدى نهايتي العتلة.

والتكرار اللاحق لتكرار الفئة المنواليه قوة تؤثرعند النهاية الأخرى للعتلة وطول العتلة = طول الفئة

2) نفرض نقطة الارتكاز التي تمثل بُعد المنوال عند أحد الطرفين= x

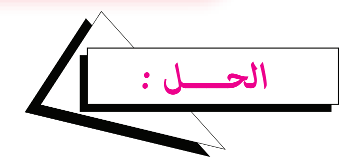
3) نطبق قانون العتلة (القوة ×ذراعها = المقاومة × ذراعها).

4) نستخرج قيمة x ونضيفها إلى الحد الأدنى للفئة المنوالية فنحصل على المنوال .



جد المنوال من الجدول الآتي :

الفئات	40-	50-	60-	70-	80-	90 -100
التكرار	6	38	59	37	8	2



الفئه المنوالية= (60-70)

طول العتلة= طول الفئة = 10

∵ القوة ×ذراعها = المقاومة × ذراعها

$(38)\ x = (37)\ (10 - x)$

$38x = 37x - 370$

$370 = 75x$

∴ $x = \frac{370}{75} = 4.9$

∴ المنوال = 60 + 4.9 = 64.9

طول العتلة = طول الفئة = 10

x | الارتكاز | 10 -x

تكرار الفئة قبل المنوالية = 38

تكرار الفئة بعد المنوالية = 37

مزايا المنوال وعيوبه :

المزايـا :

(1) بسيط في طريقة حسابه

(2) لايتأثر بالقيم الشاذة والمتطرفة.

العيوب :

(1) في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات يكون حسابه بالطرق التقريبية

(2) لايمكن ايجاده في حاله عدم وجود قيم متكررة اكثر من غيرها.

(3) قد يوجد اكثر من منوال في حالة تكرار القيم بنفس الدرجة



تمرينات (1 - 7)

س1 / عرف الوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

س2 / البيانات التالية تمثل أعمار مجموعة من الطلاب . 15، 17، 16، 18، 16، 15، 17، 18، 17، 19 جد: أ) الوسط الحسابي ، ب) الوسيط ، جـ) المنوال

س3 / إذا كان الوسط الحسابي للدخل الشهري لخمسة أشخاص (40000) دينار.فما مجموع دخولهم ؟

س4 / الجدول التالي يبن مجموع درجات الحرارة في إحدى المدن خلال 90 يوماً في فصل الصيف في أحد الأعوام :

المجموع	44-48	40-	36-	32-	28-	24-	20-	فئات درجات الحرارة
90	7	9	15	23	18	10	8	عدد الايام

المطلوب : أ) الوسط الحسابي لدرجات الحرارة. ب) الوسيط. جـ) المنوال.

س5 / الجدول الآتي يبين رواتب 60 معلماً في مدرسة والمطلوب إيجاد الوسيط لهذه الرواتب:

200-210	190-	180-	170-	160-	150-	الراتب بالف دينار
3	7	20	15	10	5	عدد المعلمين

س6 / الجدول الآتي يبين الأرباح اليومية لمجموع من المحلات في إحدى المدن جد الوسط الحسابي (معدل الربح اليومي) لهذه الارباح :

24-28	20-	16-	12-	8-	4-	الربح اليومي بالف دينار
6	12	20	15	10	8	عدد المحلات

[7-5] مقاييس التشتت *Measusres of Variation :*

إن لكل مجموعة من الأعداد وسطاً حسابيا، وإن أعداد هذه المجموعة ربما تكون متجمعة بالقرب منه أو مبتعدة عنه. فاذا كانت هذه الاعداد متجمعة بالقرب من وسطها الحسابي فان مقدار تشتتها ضئيل، وإذا كانت هذه الأعداد مبتعدة عن وسطها الحسابي فان تشتتها كبير

مثلاً: أن الوسط الحسابي للأعداد 30، 40، 50، 60، 70 هو 50

والوسط الحسابي للأعداد: 10، 20، 90، 100، 30 هو 50

عند تأمل المجموعة الأولى تشاهد أن تشتتها عن الوسط الحسابي ضئيل بينما تتشتت أعداد المجموعة الثانية عن الوسط الحسابي كبير .

مقاييس التشتت :

إن مقاييس التشتت التي سوف ندرسها هي :

1 - المدى Range .

2 - الانحراف المعياري Standard Deviation .

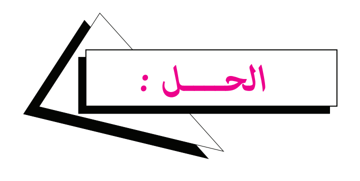
[7-5-1] المدى: هو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة للمتغير

والمدى ليس ذات مقياس مهم للتشتت لانه يتوقف على قيمتين فقط من قيم المتغير . وهما أقل وأكبر قيمة للمتغير، ولذا فهو يتأثر تأثراً بالغاً بذبذبات العينة وإن أي تغير يحدث في أي من هاتين القيمتين يؤثر بوضوح في قيمة المدى .

أ) البيانات غير مبوّبة :



ماهو المدى في مجموعة القيم التالية: 12، 35، 68، 24، 98



المدى $R = 98 - 12 = 86$

ب) البيانات مبوّبة:



ماهو المدى في التوزيع التكراري التالي :

الفئات	5-	15-	25-	35-	45-55
التكرار	3	8	15	14	7



المدى = الحد الأعلى للفئة الاخيرة - الحد الأدنى للفئة الأولى   55-5

$\therefore\ R = 50$

[7-5-2] الانحراف المعياري :

يعد الانحراف المعياري من أكثر مقاييس التشتت إستخداماً. فاذا كانت لدينا n من المفردات x_1، x_2، ....، x_n ووسطها الحسابي $\overline{x}$. فان هذه المفردات تكون متقاربة من بعضها اذا كانت قريبة من وسطها الحسابي $\overline{x}$ أي إذا كانت إنحرافاتها عن $\overline{x}$ صغيرة, ...، $\overline{x_2}$ ، $\overline{x_1}$ ، وبالتالي فان إنحرافات المفردات عن وسطها الحسابي يمكن استخدامها لقياس التشتت. ويمكن أن يتم ذلك بأخذ متوسط هذه الانحرافات.

تعريف(7-4)

الانحراف المعياري : هو القيمة الموجبة للجذر التربيعي لمتوسط مربعات إنحرافات قيم مفردات التوزيع عن وسطها الحسابي ويرمز له بالرمز (S) .

حساب الانحراف المعياري لقيم غير مبوبة :

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\overline{x})^2}$$



إحسب الانحراف المعياري للقيم الآتية: 1، 3، 5، 7، 9

الحـــل :

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 ... + x_n}{n} = \frac{25}{5} = 5$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\overline{x})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{165}{5} - 25} \quad = \sqrt{33 - 25}$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$ .... الانحراف المعياري

x	x^2
1	1
3	9
5	25
7	49
9	81
25	165

المجموع

ملاحظة :

عند طـــرح كميـــة ثـابتة من جميع القيم ، لاتؤثر على قيمة الإنحراف المعياري والمثـــال (15) يوضح ذلك :



إطرح 1 من الأعداد 1 ، 3، 5 ، 7 ، 9 ثم أحسب الإنحراف المعياري للقيم الجديدة . قارن النتيجة مع مثال (14) ماذا تلاحظ ؟



الأعداد 1 ، 3، 5 ، 7 ، 9

أطرح 1 : 0 ، 2، 4 ، 6 ، 8

$$\overline{X} = \frac{8 + 6 + 4 + 2 + 0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\overline{x})^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{120}{5} - 16} \quad = \sqrt{24 - 16}$$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$ .... الإنحراف المعياري

x	x^2
0	0
2	4
4	16
6	36
8	64
20	120

المجموع

نلاحظ نفس الإنحراف المعياري للأعداد قبل طرح (1) كما في مثال (14)

الدرجه المعياريه Standard Degree :

تعريف (4 - 7)

الدرجة المعيارية : تعرف الدرجة المعيارية بأنها خارج قسمة إنحراف قيمة ذلك المتغير عن الوسط الحسابي لتلك المجموعة على الانحراف المعياري لها.

أي أنه الدرجه المعيارية: $SD = \frac{X - \overline{X}}{S}$

[3 - 5 - 7] الارتباط : *Correlation*

تعريف (5 - 7)

الارتباط : هو العلاقة الرياضية بين متغيرين، بحيث إذا تغير احدهما باتجاه معين يميل الاخر إلى التغيير في إتجاه معين أيضاً، فاذا كان التغير باتجاه واحد سمي الارتباط طردياً، أما إذا كان التغير باتجاهين متعاكسين سمي الارتباط عكسياً .

معامل الارتباط Correlation Cofficient (r) بين المتغيرين x ، y :

نحسب معامل الارتباط: r حيث

$$r = \frac{\frac{\Sigma xy}{n} - \overline{x}\,\overline{y}}{S_x S_y}$$

حيث $\overline{x}$ = الوسط الحسابي للمتغير x

$\overline{y}$ = الوسط الحسابي للمتغير y

S_x= الانحراف المعياري للمتغير x

S_y= الانحراف المعياري للمتغير y

بعض خصائص (r) :

(1) r موجبة في حالة الارتباط الطردي (الموجب) .

(2) r=1 في حالة الارتباط الطردي التام.

(3) r سالبة في حالة الارتباط العكسي (السالب) .

(4) r= -1 في حالة الارتباط العكسي التام .

(5) r= 0 في حالة إنعدام الارتباط.

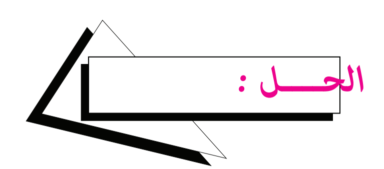
يلاحظ مما سبق أن قيمة معامل الارتبــاط تنتمي [1 , 1-]وكلمـا إقتربت قيمة r من 1+أو 1- كان هذا دليلاً على قوة الارتباط بين المتغيرين وكلما إقتربت قيمتة من الصفر كان هذا دليلاً على إنعدام الارتباط .



جد معامل الارتباط بين المتغيرين x، y ثم جد الدرجة المعيارية للعدد x=5 إذا كان :

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

ثم بين نوعه؟



x	y	x^2	y^2	x y
1	2	1	4	2
2	4	4	16	8
3	6	9	36	18
4	8	16	64	32
5	10	25	100	50
15	30	55	220	110

المجموع

$$\overline{X} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\overline{Y} = \frac{30}{5} = 6$$

$$S_x = \sqrt{\frac{55}{5} - 9} = \sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{220}{5} - 36} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{\sum x\,y}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S_x\, S_y} = \frac{\frac{110}{5} - (3)(6)}{(\sqrt{2})\,(2\sqrt{2})}$$

$$r = \frac{22 - 18}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

∴ نوع الارتباط طردي تام

$$SD = \frac{x - \bar{x}}{Sx}$$

$$\therefore SD = \frac{5-3}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$



جد معامل الارتباط بين المتغيرين y ، x ثم بين نوعه إذا كان :

x	-5	-2	1	4	7
y	9	6	3	0	-3



x	y	x^2	y^2	xy
–5	9	25	81	–45
–2	6	4	36	–12
1	3	1	9	3
4	0	16	0	0
7	–3	49	9	–21
5	15	95	135	–75

المجموع

$$\bar{X} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\bar{Y} = \frac{15}{5} = 3$$

$$S_x = \sqrt{\frac{95}{5} - (1)^2} = \sqrt{19 - 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{135}{5} - (1)^2} = \sqrt{27 - 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S_x\, S_y} = \frac{\frac{-75}{5} - (1)(3)}{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}$$

$r = \dfrac{-15 - 3}{(9)(2)} = \dfrac{-18}{(18)} = -1$ نوع الارتباط عكسي تام



تمرينات (2 - 7)

س1 /

أ) أوجد المدى للقيم التالية: 12، 9، 7، 8، 0، 3

ب) أوجد المدى من الجدول التالي :

فئات العمر	20 –	22 –	24–	26–	28–	30 - 32
التكرار	5	10	20	10	5	2

س2 /

عرف الانحراف المعياري ثم إحسب الانحراف المعياري للقيم التالية : 2، 4، 6، 8 ، 10

س3 /

أوجد الانحراف المعياري للأعداد : 3، 6، 2، 1، 7، 5 ثم أضف 5 الى كل عدد منها وأثبت أن هذه الإضافة لا تؤثر على قيمة الإنحراف المعياري ولكنها تؤثر على قيمة الوسط الحسابي .

س4 /

جد معامل الارتباط بين المتغيرين x، y ثم بين نوعه ؟

x	1	2	3
y	2	4	6

س5 /

في السؤال السابق لو ضربت قيم x في 4 تحصل على جدول آخر ،جد معامل الارتباط للقيم الجديدة وقارن النتيجة بالسؤال السابق .

x	4	8	12
y	2	4	6

س6 /

جد معامل الارتباط بين المتغيرين x ، y ثم بين نوعه؟

x	13-	9-	5-	1-	3
y	+3	+1	-1	-3	-5

المحتويات